

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: побудова планів швидкостей і прискорень для плоских важільних механізмів

Задача № 1

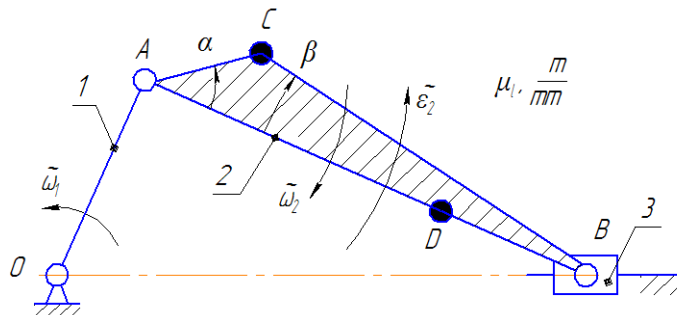
Накресліть (у загальному вигляді) плани швидкостей і прискорень для кривошипно-повзунного механізму.

Дано:

1) план механізму (μ_l – масштабний коефіцієнт довжини);

l_{OA} , l_{AB} , l_{AC} , l_{CB} – довжини ланок;

Scale diagram of the crank-slider mechanism



План механізму

2) кутова швидкість вхідної ланки ($\omega_1 = \text{const}$).

Розв'язання

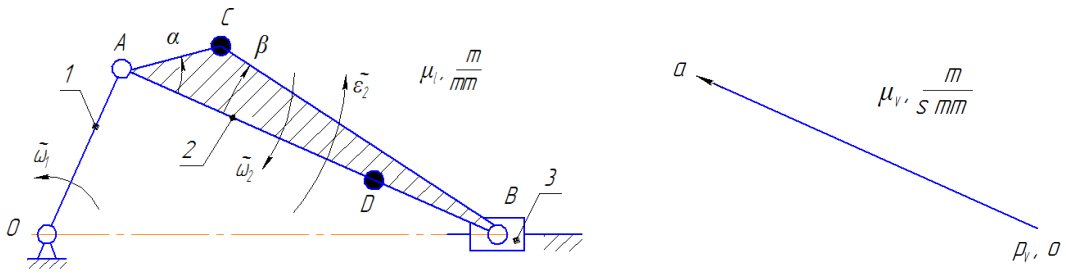
Побудова плану швидкостей кривошипно-повзунного механізму

1) Визначення швидкості точки A .

Точка A обертається навколо точки O . Це означає, що модуль швидкості точки A дорівнює

$$V_A = \omega_1 l_{OA}, \frac{m}{c}.$$

Ставимо точку p_v на плані швидкостей. Через точку p_v проводимо пряму перпендикулярну ланці № 1. Викреслюємо точку a на згаданій прямій в напрямку обертання ω_1 . Відрізок $p_v a$ відобразить вектор швидкості точки A .



Далі, визначається масштабний коефіцієнт плану швидкостей:

$$\mu_v = \frac{V_A}{p_v a}, \frac{m}{c \cdot mm}.$$

2) Визначення швидкості точки B.

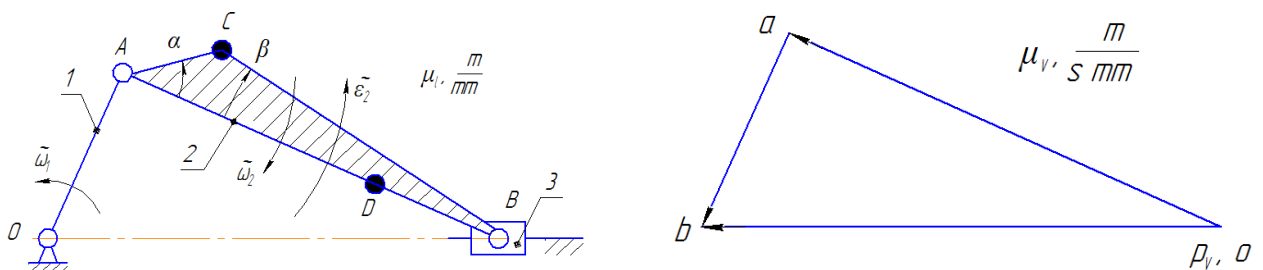
Точка B належить до ланки № 2. Ця ланка здійснює складний рух. Варто зазначити, що точка A належить ланці № 1 та, також, ланці № 2. Відтак, у відповідності до **теорема про плоско-паралельний рух**, ми можемо виразити швидкість B через швидкість точки A:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

$\parallel OB \qquad \qquad \perp BA$

Як бачимо, вектор швидкості точки B (V_B) паралельний до відрізка OB, оскільки точка B належить також і ланці № 3. Вектор швидкості точки B навколо точки A (V_{BA}) перпендикулярний до відрізка AB.

Викреслюємо пряму паралельну до OB через точку p_v і пряму перпендикулярну до AB через точку a. Згадані прямі перетинаються в деякій точці. Позначимо її як точку B. В результаті, вектор $p_v b$ відображає вектор швидкості точки B, вектор ab відображає вектор швидкості точки B навколо точки A.



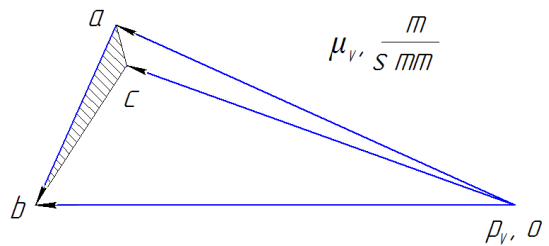
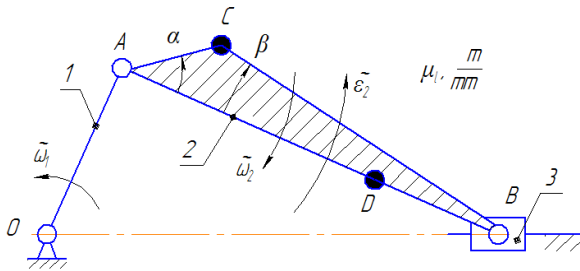
Модулі згаданих векторів рівні

$$V_B = p_v b \cdot \mu_v, \frac{m}{c}, \quad V_{BA} = ab \cdot \mu_v, \frac{m}{c}.$$

3) Визначення швидкості точки C.

Визначаємо швидкість точки C, використовуючи першу властивість плану швидкостей: якщо на плані механізму три точки, які належать одній ланці утворюють трикутник, то ці точки будуть утворювати подібний трикутник і на плані швидкостей, але повернутий на 90° .

Як бачимо, точки A , B та C належать ланці № 2 та утворюють трикутник. Це означає, що точки a , b та c на плані швидкостей також утворюватимуть подібний трикутник, але повернутий на 90° . Викреслимо пряму перпендикулярну до сторони AC через точку a . Далі, викреслимо пряму перпендикулярну до сторони BC через точку b . Згадані вище прямі перетинаються в деякій точці. Це і буде шукана точка c .



Величина швидкості точки C

$$V_C = p_v c \cdot \mu_v, \frac{m}{c}.$$

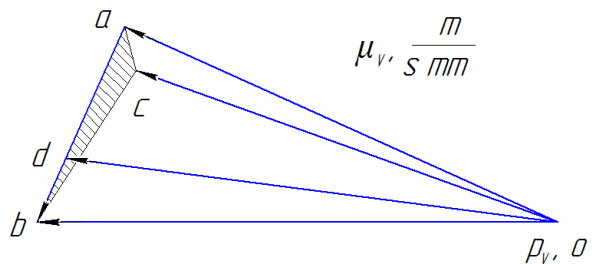
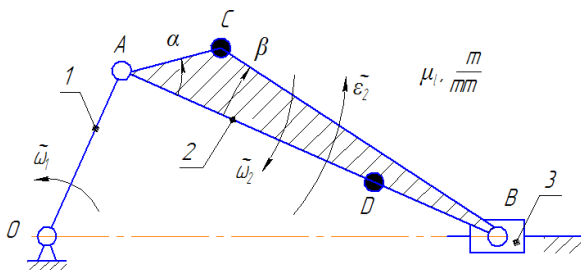
4) Визначення швидкості точки D .

Визначимо швидкість точки D використовуючи другу властивість плану швидкостей: якщо на плані механізму три точки лежать на одній ланці й на одній прямій і ділять цю пряму на відрізки в деякому співвідношенні, то на плані швидкостей ці точки також будуть лежати на одній прямій і ділитимуть її на відрізки в цьому ж співвідношенні.

Запишемо співвідношення

$$\frac{AD}{AB} = \frac{ad}{ab}, \quad ad = \frac{AD \cdot ab}{AB}, \text{ мм.}$$

Відміряємо « ad » міліметрів від точки a вздовж відрізка ab і поставимо точку d .



Величина швидкості точки D дорівнює:

$$V_D = p_v d \cdot \mu_v, \frac{m}{c}.$$

5) Визначення кутової швидкості ланки № 2.

Величина кутової швидкості дорівнює:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{ab \cdot \mu_v}{AB \cdot \mu_l}, \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Вектор V_{BA} вказує, що ланка № 2 обертається навколо точки A «за годинниковою стрілкою». Це означає, що вектор ω_2 також має напрям «за годинниковою стрілкою».

Побудова плану прискорень кривошипно-повзунного механізму

1) Визначення прискорення точки A .

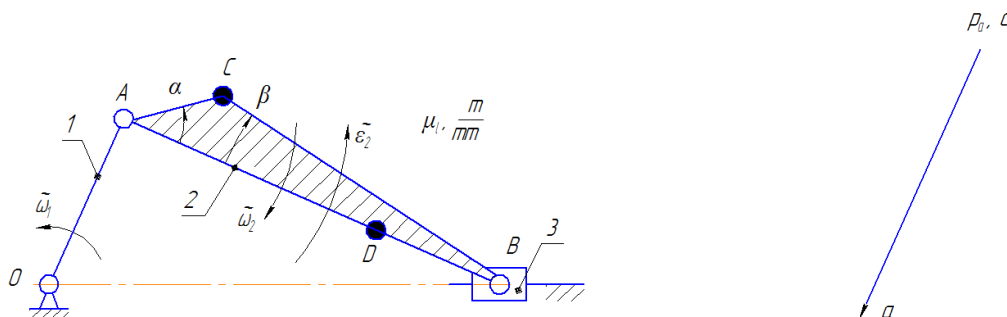
Точка A обертається навколо точки O . Це означає, що прискорення точки A дорівнює

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t,$$

$$\omega_1 = \text{const}; \varepsilon_1 = 0;$$

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 l_{OA}, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Для початку побудови плану прискорень ставимо точку p_a . Викреслюємо пряму паралельну до ланки № 1 через точку p_a . Ставимо точку a на згаданій прямій в напрямку від точки A до точки O . Вектор $p_a a$ відображає вектор прискорення точки A .



Далі визначаємо масштабний коефіцієнт плану прискорень:

$$\mu_a = \frac{a_A}{p_a a}, \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}.$$

2) Визначення прискорення точки B .

Точка B належить ланці № 2. Дана ланка здійснює складний рух. Точка A також належить ланці № 2. З огляду на це, ми можемо виразити прискорення точки B через прискорення точки A у відповідності до теореми про плоско паралельний рух:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t.$$

$\parallel OB \quad \parallel BA \quad \perp BA$

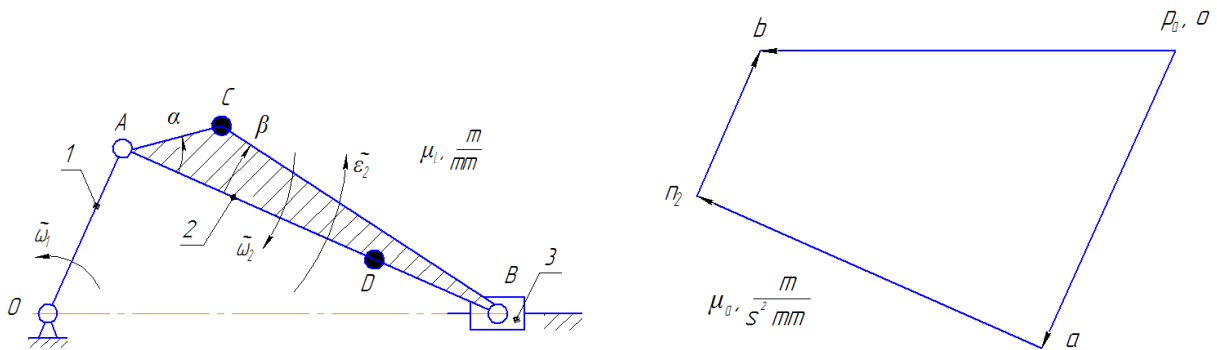
Як можемо бачити, прискорення точки B (a_B) паралельне до відрізка OB , оскільки точка B належить також і до ланки № 3. Нормальне прискорення точки B навколо точки A (a_{BA}^n) паралельне до відрізка AB (і напрямлене від точки B до точки A). Модуль вектора a_{BA}^n :

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB}, \frac{M}{c^2}.$$

Довжина відрізка, що представляє вектор a_{BA}^n на плані прискорень, дорівнює:

$$an_2 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}, \text{ мм.}$$

Далі, викреслюємо пряму паралельну до відрізка AB через точку a . Проставляємо точку n_2 на згаданій прямій у напрямку від точки B до точки A . Після цього, рисуємо пряму перпендикулярну до відрізка AB через точку n_2 . Ця пряма перетинає горизонталь, що була викреслена через точку p_a . В результаті отримали точку B .



Величини прискорень:

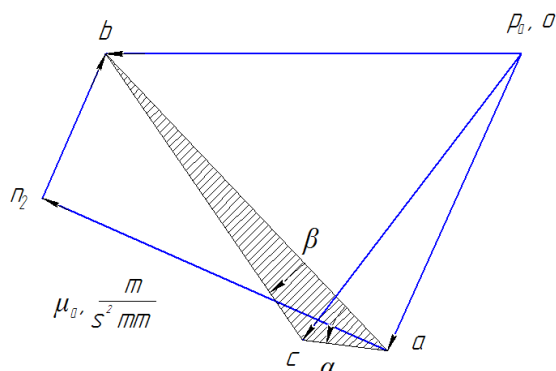
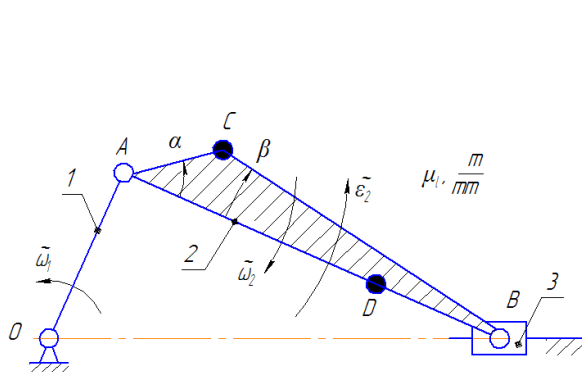
$$a_{BA}^t = n_2 b \cdot \mu_a, \frac{M}{c^2};$$

$$a_B = p_a b \cdot \mu_a, \frac{M}{c^2}.$$

3) Визначення прискорення точки C .

Визначаємо прискорення точки C , використовуючи першу властивість плану прискорень: *якщо на плані механізму три точки, які належать одній ланці утворюють трикутник, то ці точки будуть утворювати подібний трикутник і на плані прискорень.*

Як бачимо, точки A , B та C належать ланці № 2 та утворюють трикутник. Це означає, що точки a , b та c на плані прискорень також утворюватимуть подібний трикутник. Проводимо пряму через точку a під кутом α до відрізка ab (кут α збільшується проти годинникової стрілки). Далі через точку b проводимо пряму під кутом β до відрізка ab (кут β збільшується за годинниковою стрілкою). Згадані вище прямі перетинаються в деякій точці. Це і буде точка c .



Величина прискорення точки C

$$a_C = p_a c \cdot \mu_a, \frac{m}{c^2}.$$

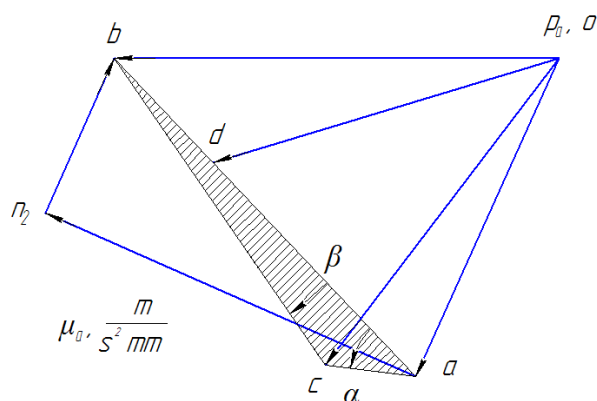
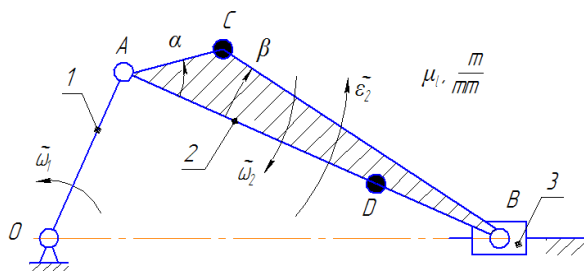
4) Визначення прискорення точки D .

Визначимо прискорення точки D використовуючи другу властивість плану прискорень: якщо на плані механізму три точки лежать на одній ланці й на одній прямій і ділять цю пряму на відрізки в деякому співвідношенні, то на плані прискорень ці точки також будуть лежати на одній прямій і ділитимуть її на відрізки в цьому ж співвідношенні.

Запишемо співвідношення

$$\frac{AD}{AB} = \frac{ad}{ab}, \quad ad = \frac{AD \cdot ab}{AB}, \text{ мм.}$$

Відміряємо « ad » міліметрів від точки a уздовж відрізка ab і поставимо точку d .



Величина прискорення точки D дорівнює:

$$a_D = p_a d \cdot \mu_a, \frac{m}{c^2}.$$

5) Визначення кутового прискорення ланки № 2.

Величина кутового прискорення дорівнює:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{l_{AB}} = \frac{n_2 b \cdot \mu_a}{AB \cdot \mu_l}, \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Вектор a_{BA}^t показує, що кутове прискорення ε_2 має напрям «проти годинникової стрілки» відносно точки A .

Задача № 2

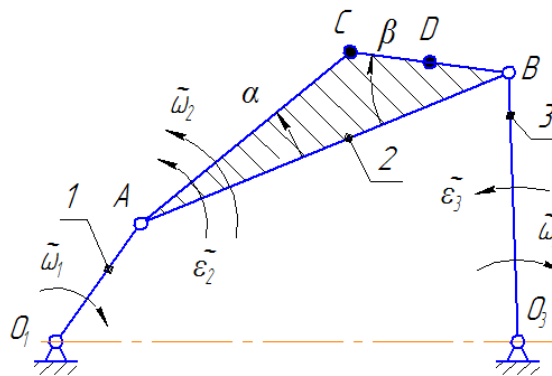
Накресліть (у загальному вигляді) плани швидкостей і прискорень для кривошипно-коромислового механізму.

Дано:

1) план механізму (μ_l – масштабний коефіцієнт довжини);

l_{O_1A} , l_{AB} , l_{AC} , l_{CB} , l_{O_3B} – довжини ланок;

Scale diagram of the crank-rocker mechanism



План механізму

2) кутова швидкість входної ланки ($\omega_1 = \text{const}$).

Розв'язання

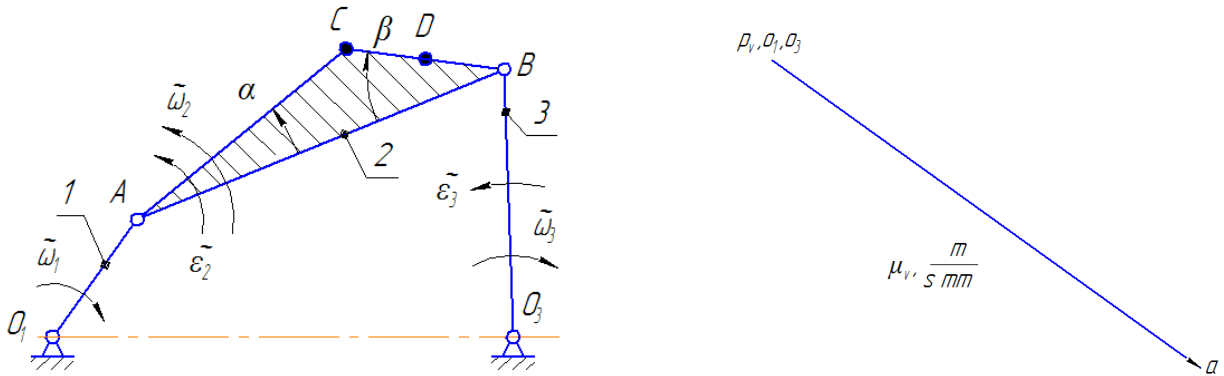
Побудова плану швидкостей кривошипно-коромислового механізму

1) Визначення швидкості точки A .

Точка A обертається навколо точки O_1 . Це означає, що модуль швидкості точки A дорівнює

$$V_A = \omega_1 l_{O_1A}, \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ставимо точку p_v на плані швидкостей. Через точку p_v проводимо пряму перпендикулярну ланці № 1. Викреслюємо точку a на згаданій прямій в напрямку обертання ω_1 . Відрізок $p_v a$ відображатиме вектор швидкості точки A .



Далі, визначається масштабний коефіцієнт плану швидкостей:

$$\mu_v = \frac{V_A}{p_v a}, \frac{m}{s \cdot mm}.$$

2) Визначення швидкості точки B .

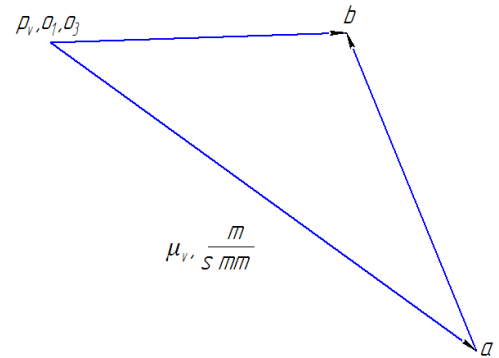
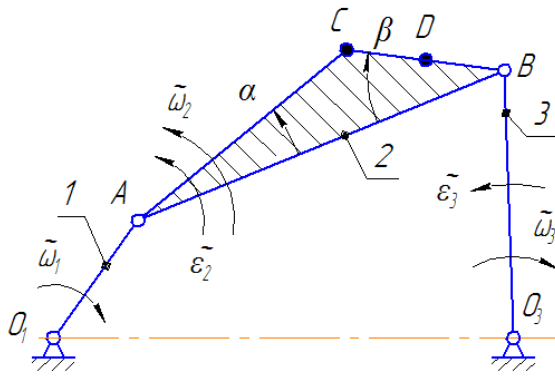
Точка B належить до ланки № 2. Ця ланка здійснює складний рух. Варто зазначити, що точка A належить ланці № 1 та, також, ланці № 2. Відтак, у відповідності до **теорема про плоско-паралельний рух**, ми можемо виразити швидкість B через швидкість точки A :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

$\perp BO_3 \quad \quad \quad \perp BA$

Як бачимо, вектор швидкості точки B (V_B) перпендикулярний до відрізка $O_3 B$, оскільки точка B належить також і ланці № 3. Вектор швидкості точки B навколо точки A (V_{BA}) перпендикулярний до відрізка AB .

Викреслюємо пряму перпендикулярну до $O_3 B$ через точку p_v і пряму перпендикулярну до AB через точку a . Згадані прямі перетинаються в деякій точці. Позначимо її як точку B . В результаті, вектор $p_v B$ відображає вектор швидкості точки B , вектор aB відображає вектор швидкості точки B навколо точки A .



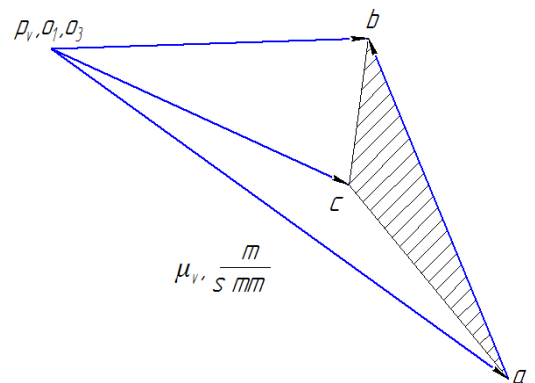
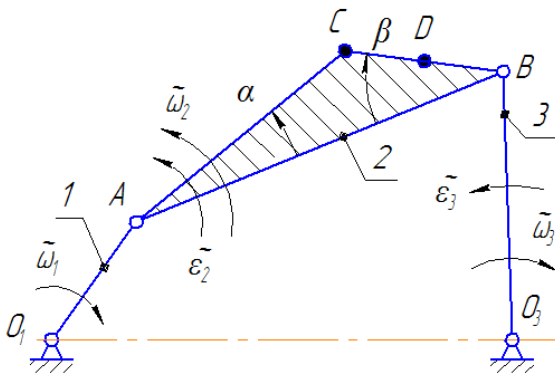
Модулі згаданих векторів рівні

$$V_B = p_v b \cdot \mu_v, \frac{m}{c}, \quad V_{BA} = ab \cdot \mu_v, \frac{m}{c}.$$

3) Визначення швидкості точки C.

Визначаємо швидкість точки C, використовуючи першу властивість плану швидкостей: якщо на плані механізму три точки, які належать одній ланці утворюють трикутник, то ці точки будуть утворювати подібний трикутник і на плані швидкостей, але повернутий на 90° .

Як бачимо, точки A, B та C належать ланці № 2 та утворюють трикутник. Це означає, що точки a, b та c на плані швидкостей також утворюватимуть подібний трикутник, але повернутий на 90° . Викреслимо пряму перпендикулярну до сторони AC через точку a. Далі, викреслимо пряму перпендикулярну до сторони BC через точку b. Згадані вище прямі перетинаються в деякій точці. Це і буде шукана точка c.



Величина швидкості точки C

$$V_C = p_v c \cdot \mu_v, \frac{m}{c}.$$

4) Визначення швидкості точки D.

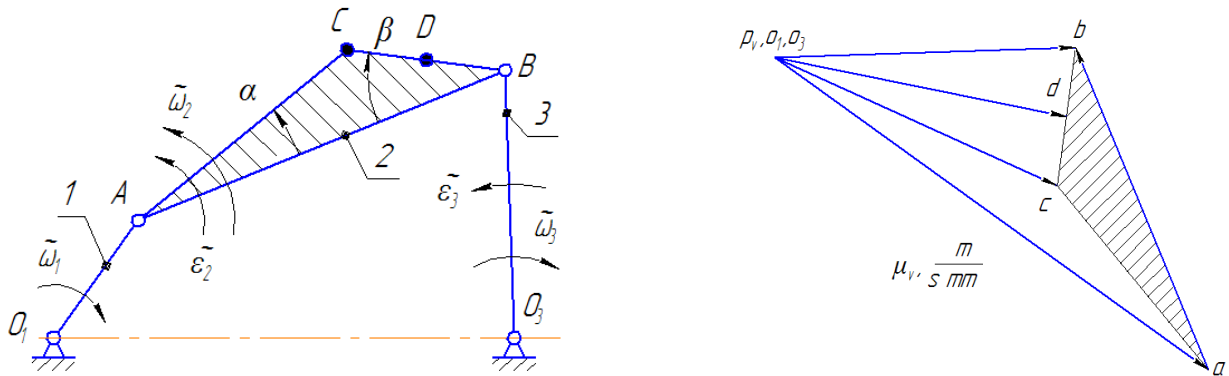
Визначимо швидкість точки D використовуючи другу властивість плану швидкостей: якщо на плані механізму три точки лежать на одній ланці й на одній прямій і ділять цю пряму на відрізки в

деякому співвідношенні, то на плані швидкостей ці точки також будуть лежати на одній прямій і ділитимуть її на відрізки в цьому ж співвідношенні..

Запишемо співвідношення

$$\frac{CD}{CB} = \frac{cd}{cb}, \quad cd = \frac{CD \cdot cb}{CB}, \text{ мм.}$$

Відміряємо « cd » міліметрів від точки c вздовж відрізка cb і поставимо точку d .



Величина швидкості точки D дорівнює:

$$V_D = p_v d \cdot \mu_v, \quad \frac{m}{c}.$$

5) Визначення кутових швидкостей ланок № 2 та № 3.

Величини кутових швидкостей дорівнюють:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{ab \cdot \mu_v}{AB \cdot \mu_l}, \quad \frac{rad}{c},$$

$$\omega_3 = \frac{V_B}{l_{O_3B}} = \frac{p_v b \cdot \mu_v}{O_3B \cdot \mu_l}, \quad \frac{rad}{c}.$$

Вектор V_{BA} вказує, що ланка № 2 обертається навколо точки A «проти годинникової стрілки». Це означає, що вектор ω_2 також має напрям «проти годинникової стрілки». Вектор V_B вказує, що ланка № 3 обертається навколо точки O_3 «за годинниковою стрілкою». Це означає, що вектор ω_3 також має напрям «за годинниковою стрілкою».

Побудова плану прискорень кривошипно-коромислового механізму

1) Визначення прискорення точки A .

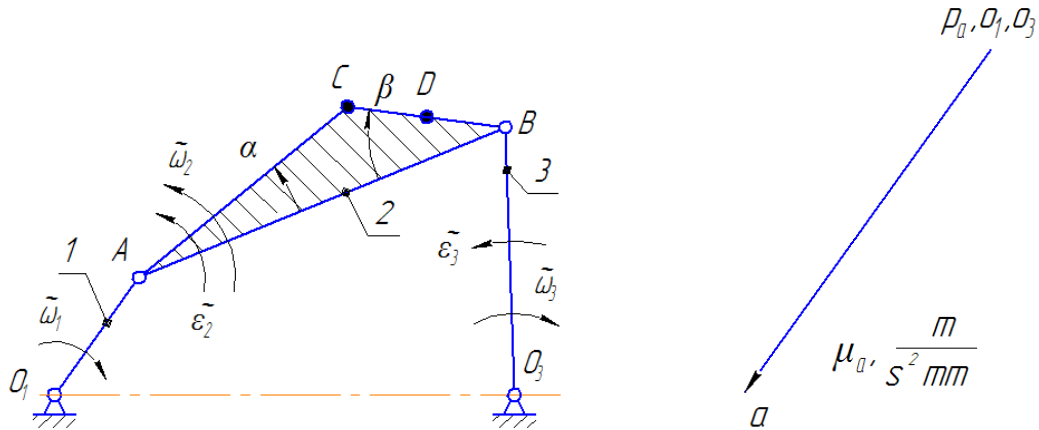
Точка A обертається навколо точки O_1 . Це означає, що прискорення точки A дорівнює

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t,$$

$$\omega_1 = \text{const}; \varepsilon_1 = 0;$$

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 l_{O_1A}, \frac{m}{c^2}.$$

Для початку побудови плану прискорень ставимо точку p_a . Викреслюємо пряму паралельну до ланки № 1 через точку p_a . Ставимо точку a на згаданій прямій в напрямку від точки A до точки O_1 . Вектор $p_a a$ відображає вектор прискорення точки A .



Далі визначаємо масштабний коефіцієнт плану прискорень:

$$\mu_a = \frac{a_A}{p_a a}, \frac{m}{c^2 \cdot \text{мм}}.$$

2) Визначення прискорення точки B .

Точка B належить ланці № 2. Дана ланка здійснює складний рух. Точка A також належить ланці № 2. З огляду на це, ми можемо виразити прискорення точки B через прискорення точки A у відповідності до теореми про плоско паралельний рух:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t.$$

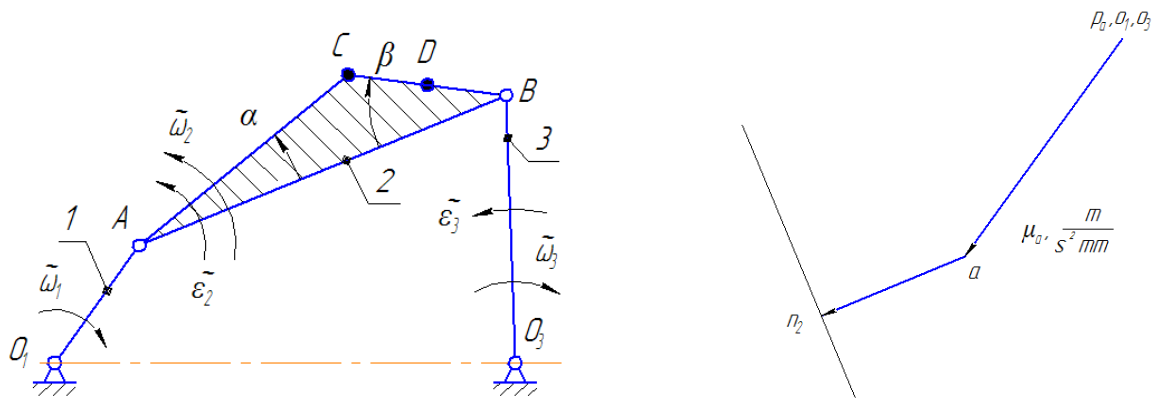
Нормальне прискорення точки B навколо точки A (a_{BA}^n) паралельне до відрізка AB (і напрямлене від точки B до точки A). Модуль вектора a_{BA}^n :

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB}, \frac{m}{c^2}.$$

Довжина відрізка, що представляє вектор a_{BA}^n на плані прискорень, дорівнює:

$$an_2 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}, \text{ мм}.$$

Далі, викреслюємо пряму паралельну до відрізка AB через точку a . Проставляємо точку n_2 на згаданій прямій у напрямку від точки B до точки A . Після цього, рисуємо пряму перпендикулярну до відрізка AB через точку n_2 .



До того ж, ми можемо виразити прискорення точки B через прискорення точки O_3 у відповідності до теореми про плоско паралельний рух:

$$\vec{a}_B = \underbrace{\vec{a}_{O_3}}_{\text{дорівнює "0"}} + \underbrace{\vec{a}_{BO_3}^n}_{\text{П } BO_3} + \underbrace{\vec{a}_{BO_3}^t}_{\perp BO_3}.$$

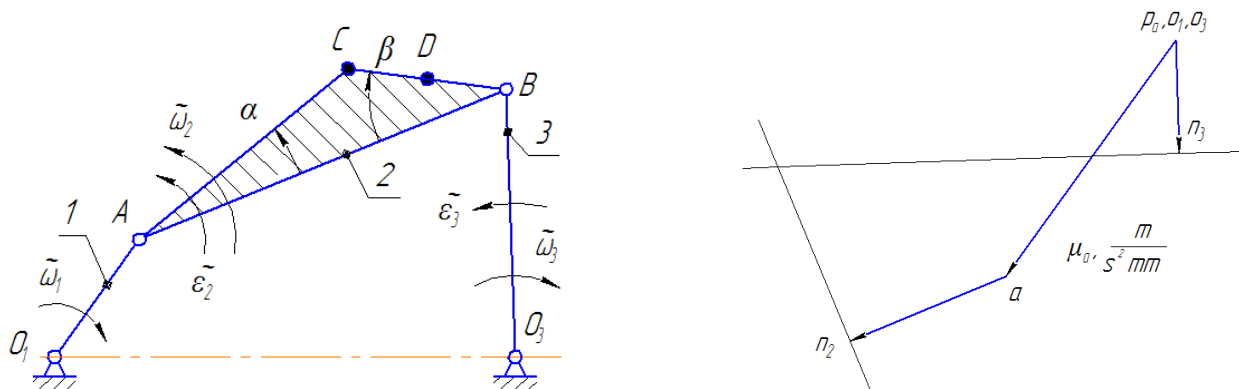
Нормальне прискорення точки B навколо точки O_3 ($a_{BO_3}^n$) паралельне до відрізка BO_3 (і напрямлене від точки B до точки O_3). Модуль вектора $a_{BO_3}^n$:

$$a_{BO_3}^n = \omega_3^2 l_{BO_3}, \frac{M}{C^2}.$$

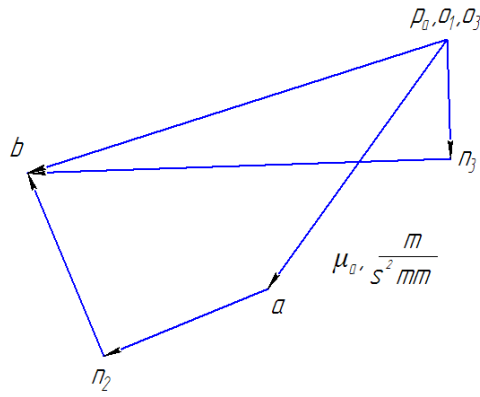
Довжина відрізка, що представляє вектор $a_{BO_3}^n$ на плані прискорень, дорівнює:

$$o_3 n_3 = \frac{a_{BO_3}^n}{\mu_a}, \text{ мм.}$$

Далі, викреслюємо пряму паралельну до відрізка BO_3 через точку o_3 . Проставляємо точку n_3 на згаданій прямій у напрямку від точки B до точки O_3 . Після цього, рисуємо пряму перпендикулярну до відрізка BO_3 через точку n_3 .



Прямі, що проходять через точки n_2 та n_3 перетинають одна одну. В результаті отримується точка b .



Величини прискорень:

$$a_{BA}^t = n_2 b \cdot \mu_a, \frac{m}{c^2};$$

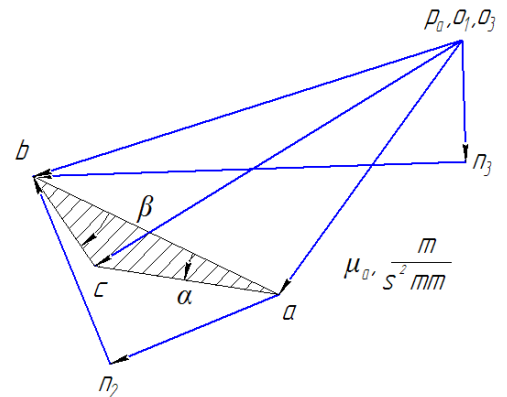
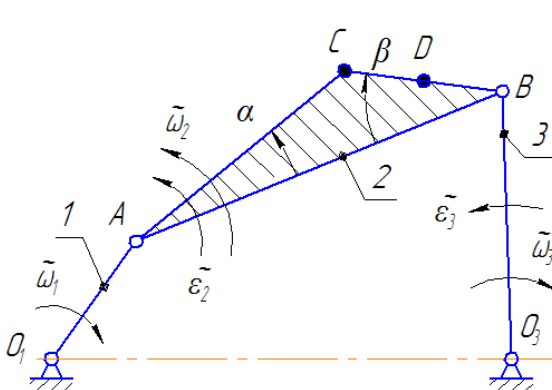
$$a_{BO_3}^t = n_3 b \cdot \mu_a, \frac{m}{c^2};$$

$$a_B = p_a b \cdot \mu_a, \frac{m}{c^2}.$$

3) Визначення прискорення точки C.

Визначаємо прискорення точки C, використовуючи першу властивість плану прискорень: *якщо на плані механізму три точки, які належать одній ланці утворюють трикутник, то ці точки будуть утворювати подібний трикутник і на плані прискорень.*

Як бачимо, точки A, B та C належать ланці № 2 та утворюють трикутник. Це означає, що точки a, b та c на плані прискорень також утворюватимуть подібний трикутник. Проводимо пряму через точку a під кутом α до відрізка ab (кут α збільшується проти годинникової стрілки). Далі через точку b проводимо пряму під кутом β до відрізка ab (кут β збільшується за годинниковою стрілкою). Згадані вище прямі перетинаються в деякій точці. Це і буде точка c.



Величина прискорення точки C

$$a_C = p_a c \cdot \mu_a, \frac{m}{c^2}.$$

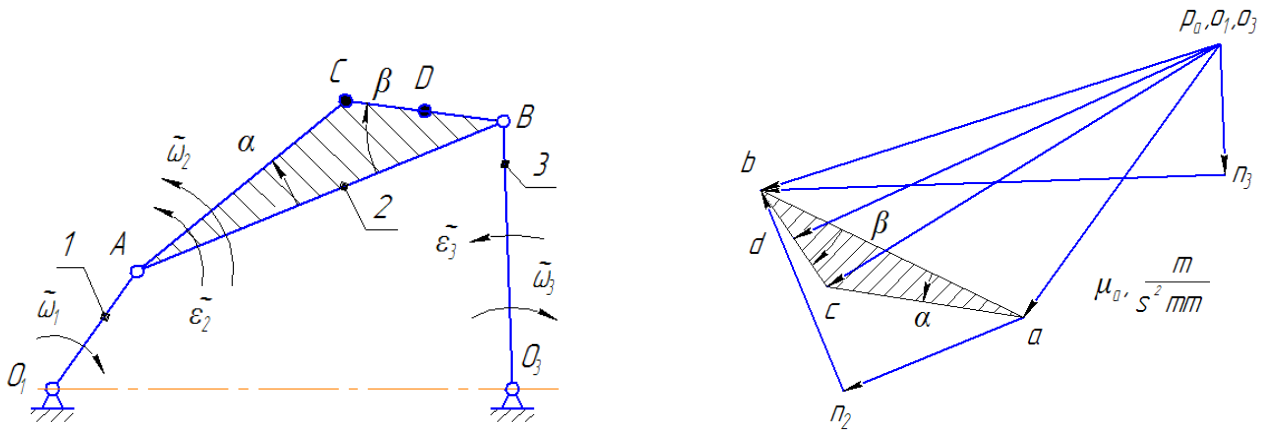
4) Визначення прискорення точки D .

Визначимо прискорення точки D використовуючи другу властивість плану прискорень: якщо на плані механізму три точки лежать на одній ланці й на одній прямій і ділять цю пряму на відрізки в деякому співвідношенні, то на плані прискорень ці точки також будуть лежати на одній прямій і ділитимуть її на відрізки в цьому ж співвідношенні.

Запишемо співвідношення

$$\frac{CD}{CB} = \frac{cd}{cb}, \quad cd = \frac{CD \cdot cb}{CB}, \text{ мм.}$$

Відміряємо « cd » міліметрів від точки c уздовж відрізка cb і поставимо точку d .



Величина прискорення точки D дорівнює:

$$a_D = p_a d \cdot \mu_a, \frac{m}{c^2}.$$

5) Визначення кутових прискорень ланок № 2 та № 3.

Величина кутового прискорення дорівнює:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{l_{AB}} = \frac{n_2 b \cdot \mu_a}{AB \cdot \mu_l}, \frac{\text{рад}}{c^2},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{BO_3}^t}{l_{BO_3}} = \frac{n_3 b \cdot \mu_a}{BO_3 \cdot \mu_l}, \frac{\text{рад}}{c^2}.$$

Вектор a_{BA}^t показує, що кутове прискорення ε_2 має напрям «проти годинникової стрілки» відносно точки A . Вектор $a_{BO_3}^t$ показує, що кутове прискорення ε_3 має напрям «проти годинникової стрілки» відносно точки O_3 .