

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти області визначення функцій:

а) $z = x^2 + y^2$;

б) $z = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$;

в) $z = \arcsin 3xy$;

г) $z = \sqrt{\ln x + \ln y}$;

д) $u = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}$;

е) $u = \frac{z}{x + y}$;

є) $u = \arcsin \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$;

ж) $u = \sqrt{x + y + z}$.

2. Знайти лінії рівня функцій:

а) $z = x + 2y$;

б) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.

3. Знайти поверхні рівня функцій:

а) $u = 2x + y + z$;

б) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$.

4. З'ясувати, чи існують границі:

а) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

б) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$.

5. Обчислити границі:

а) $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}$;

б) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg} 2xy}{x^2 y}$;

в) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$;

г) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$;

д) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy - x + y}$;

е) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{4x^2 + y^2}$.

6. Знайти точки розриву функцій:

а) $z = \frac{x^2 + 2y}{x^2 + y^2 - 4}$;

б) $z = \frac{1}{xy}$;

в) $u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$;

г) $u = \frac{1}{xyz}$.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. а) Функція z визначена на всій площині xOy , тобто для будь-яких значень x і y ;
- б) круг $x^2 + y^2 < R^2$;
- в) частина площини xOy , обмежена двома спряженими гіперболами $y = \frac{1}{3x}$ та $y = -\frac{1}{3x}$;
- г) $x > 0, y > 0, xy > 1$, тобто сукупність точок першого квадранта, що лежать над гіперболою $y = \frac{1}{x}$ та на самій гіперболі;
- д) $D: x^2 + y^2 + z^2 < a^2$ – внутрішні точки простору, обмежені сферою $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- е) функція u визначена у всіх точках простору, крім точок площини $x + y = 0$, оскільки в точках цієї площини знаменник дробу перетворюється в нуль;
- є) частина простору поза конусом $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
- ж) частина простору над площиною $x + y + z = 0$ разом з цією площиною.
2. а) сім'я паралельних прямих $x + 2y = C$;
- б) еліпси з півосями $2\sqrt{C}$ і 3 ($C \geq 0$).
3. а) сім'я паралельних площин $2x + y + z = C$;
- б) сім'я концентричних сфер $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - c^2$, c – стала ($c^2 \leq R^2$) з центром в початку координат.
4. а) Границя функції в точці $(0;0)$ не існує;
- б) границя функції в точці $(0;0)$ не існує.
5. а) a ; б) 2 ; в) 0 ; г) 0 ; д) 4 ; е) 0 .
6. а) $x^2 + y^2 = 4$ – лінія розриву функції;
- б) $x = 0, y = 0$ – лінії розриву функції;
- в) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ – поверхня розриву(конус);
- г) $x = 0, y = 0, z = 0$ – поверхні розриву (координатні площини).