

§ 2. Похідні і диференціали функцій

2.1 Частинні похідні першого порядку

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякій відкритій області D і точка $M_0(x_0; y_0) \in D$. Тоді різниця $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0; y_0)$ називається *частинним приростом* функції $z = f(x, y)$ по змінній x , різниця $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ – *частинним приростом* функції по змінній y , а різниця $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ – *повним приростом* функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Аналогічно визначаються частинні та повний прирости функцій для довільної кількості змінних. Наприклад, для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta_y u = f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta_z u = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Якщо позначити $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, то рівність $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0)$ можна записати так

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)) = 0, \text{ або } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0.$$

Ця рівність дає означення неперервності функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Якщо існує скінченна границя відношення частинного приросту функції по якомусь із аргументів в точці $M_0 \in D$ до приросту цього аргументу, за умови, що цей приріст прямує до нуля, то цю границю називають *частинною похідною* від функції f по вказаному аргументу.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ частинну похідну по x позначають одним із символів:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, f'_x(x_0, y_0). \text{ Аналогічно частинну похідну по } y \text{ позначають } \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, f'_y(x_0, y_0).$$

Отже, за означенням, частинні похідні в точці $M_0(x_0; y_0)$ визначаються співвідношеннями:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x};$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Якщо замість фіксованої точки $M_0(x_0; y_0)$ беруть довільну точку $M(x; y) \in D$, то частинні похідні відповідно записують $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$.

З означення випливає, що частинна похідна функції $z = f(x; y)$ по змінній x є звичайною похідною від функції однієї змінної x при фіксованому значенні змінної y , а похідна по y є похідною від функції однієї змінної y при фіксованому значенні x . Тому частинні похідні обчислюють за формулами й за правилами знаходження похідних функцій однієї змінної.

2.2 Повний диференціал функції та його застосування до наближених обчислень

Повним приростом функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ називається різниця $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, де Δx та Δy – довільні прирости аргументів ($M(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D(f)$).

Функція $z = f(x, y)$ називається диференційовною в точці (x, y) , якщо в цій точці повний приріст можна подати у вигляді $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, де A і B – дійсні числа, що не залежать від приростів Δx та Δy . Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні функції, причому $f'_x(x_0, y_0) = A$, $f'_y(x_0, y_0) = B$.

Повним диференціалом функції $z = f(x, y)$ називається головна частина повного приросту Δz , лінійна відносно приростів аргументів Δx та Δy , тобто $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Диференціали незалежних змінних збігаються з їх приростами, тобто $dx = \Delta x$ і $dy = \Delta y$.

Повний диференціал функції $z = f(x, y)$ обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (1)$$

Аналогічно, повний диференціал функції трьох аргументів $u = f(x, y, z)$ визначається за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (2)$$

При досить малому $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ для диференційовної функції $z = f(x, y)$ справедлива наближена рівність $\Delta z \approx dz$, а звідси

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y. \quad (3)$$

У випадку функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ аналогічно $\Delta u \approx du$, тоді

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \Delta z. \quad (4)$$

Наближена рівність тим точніша, чим менші величини Δx , Δy , Δz . Обчислення приросту функції Δf значно складніше, ніж обчислення її диференціала df . Тому в практичних обчисленнях з достатньою точністю при малих приростах незалежних змінних обчислення приросту функції замінюють обчисленням її диференціала.

2.3 Частинні похідні і диференціали вищих порядків

Частинними похідними другого порядку від функції $z = f(x, y)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку. Їх позначають наступним чином

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = f^{(2)}_{x^2}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) = f^{(2)}_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y) = f^{(2)}_{yx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) = f^{(2)}_{y^2}(x, y).$$

Аналогічно визначаються частинні похідні третього і вищих порядків, зокрема

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y) = f^{(3)}_{x^3}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y) = f^{(3)}_{x^2 y}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = f'''_{xyy}(x, y) = f^{(3)}_{xy^2}(x, y) \text{ і т.д.}$$

Якщо мішані похідні f''_{xy} і f''_{yx} в точці (x, y) неперервні, то $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$ (результат не залежить від порядку диференціювання). Це твердження узагальнюється на випадок мішаних похідних третього і вищих порядків, наприклад: $\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}; \frac{\partial^5 z}{\partial x \partial y^2 \partial x \partial y} = \frac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y^3}.$

Диференціалом другого порядку від функції $z = f(x, y)$ називається диференціал від її диференціала першого порядку, тобто $d^2 z = d(dz)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків, тобто $d^3 z = d(d^2 z), \dots, d^n z = d(d^{n-1} z).$

Якщо x і y – незалежні змінні і функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то диференціали вищих порядків визначаються за формулами:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2; \quad (8)$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \quad (9)$$

Взагалі, справедлива символічна формула $d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z$, яка формально розкривається за біноміальним законом.

У випадку функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ матимемо

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^n u.$$

Зокрема, при $n = 2$

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2. \quad (10)$$

2.4 Диференціювання складених функцій

Нехай $z = f(x, y)$ – функція двох змінних x і y , які залежать від змінних u і v : $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, тоді функція $z = f(x(u, v), y(u, v))$ є складеною функцією незалежних змінних u і v . Якщо функції f , x та y диференційовні (кожна у своїй області), то частинні похідні складеної функції z обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (12)$$

Якщо $z = f(x, y)$ – диференційовна функція змінних x і y , які, в свою чергу, є диференційовними функціями незалежної змінної t , тобто $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то існує повна похідна $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ за змінною t , яка обчислюється за формулою:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (13)$$

Зокрема, якщо t збігається із змінною x , то повна похідна $\frac{dz}{dx}$ функції z

за змінною x дорівнює

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}; \quad (14)$$

Аналогічно для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$, де $y = y(x)$, $z = z(x)$ маємо формулу повної похідної

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx}. \quad (15)$$

2.5 Диференціювання функцій, заданих неявно

Похідну неявної функції $y = y(x)$, заданої за допомогою рівняння $F(x, y) = 0$, де $F(x, y)$ – диференційовна функція змінних x та y , можна обчислити за формулою

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \text{ за умови } F'_y \neq 0. \quad (16)$$

Похідні вищих порядків неявної функції можна знайти послідовним диференціюванням заданої формули, вважаючи при цьому y функцією від x .

Аналогічно, частинні похідні неявної функції двох змінних $z = \varphi(x, y)$, заданої рівнянням $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z)$ – диференційовна функція змінних x , y і z , можна за умови $F'_z \neq 0$ обчислити за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad (17)$$

Обчислення частинних похідних $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ буде показано на прикладах.