

Приклади розв'язання задач

7. Знайти частинні похідні функцій:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } z = x^2 + 5xy + 3y^2; & \text{б) } z = e^{\frac{x}{y}}; \\ \text{в) } z = e^{\arctg \sqrt{xy}}; & \text{г) } z = x^y (x > 0); \\ \text{д) } u = \cos(2x + 3y - 5z); & \text{е) } u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{array}$$

► а) Функція z – функція двох незалежних змінних x і y . При знаходженні частинної похідної по x змінну y вважають сталою, а при знаходженні похідної по y змінну x вважають сталою. Тоді $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 + 5xy + 3y^2)'_x = 2x + 5y$, оскільки похідна $(3y^2)'_x = 0$.

Аналогічно $\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + 5xy + 3y^2)'_y = 5x + 6y$, бо $(x^2)'_y = 0$. ◀

$$\begin{aligned} \text{► б) } \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(e^{\frac{x}{y}} \right)'_x = e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} \right)'_x = e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y} = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}, \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(e^{\frac{x}{y}} \right)'_y = e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} \right)'_y = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► в) При фіксованому y функція z є складеною функцією аргумента x . Знаходимо похідну цієї функції

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\arctg \sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{1+xy} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = \frac{\sqrt{y} e^{\arctg \sqrt{xy}}}{2\sqrt{x}(1+xy)}.$$

При фіксованому x функція z є складеною функцією аргумента y , тому

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\arctg \sqrt{xy}} \frac{1}{1+xy} \frac{1}{2\sqrt{xy}} x = \frac{\sqrt{x} e^{\arctg \sqrt{xy}}}{2\sqrt{y}(1+xy)}. \quad \blacktriangleleft$$

► г) При знаходженні частинної похідної функції $z = x^y$ за змінною x розглядаємо функцію z як функцію однієї змінної x (вважаємо, що y має фіксоване значення), при цьому функція $z = x^y$ є степеневою функцією аргумента x . За правилом диференціювання степеневої функції маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x = yx^{y-1}$.

Аналогічно при знаходженні частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що зафіксовано значення x , і розглядаємо функцію $z = x^y$ як показникову функцію аргумента y . Одержуємо $\frac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y \ln x$. ◀

► д) Функція u є функцією трьох незалежних змінних x, y і z . При знаходженні частинної похідної по кожній із цих змінних дві інші змінні вважають сталими величинами.

Тому
$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\cos(2x + 3y - 5z))'_x = -\sin(2x + 3y - 5z)(2x + 3y - 5z)'_x = -2\sin(2x + 3y - 5z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\cos(2x + 3y - 5z))'_y = -\sin(2x + 3y - 5z)(2x + 3y - 5z)'_y = -3\sin(2x + 3y - 5z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (\cos(2x + 3y - 5z))'_z = -\sin(2x + 3y - 5z)(2x + 3y - 5z)'_z = 5\sin(2x + 3y - 5z). \blacktriangleleft$$

► е) При фіксованих значеннях y і z функція $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ є складеною функцією аргумента x . Знаходимо похідну цієї функції по x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Аналогічно
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Зазначимо, що одержані формули не мають змісту в точці $(0;0;0)$. Покажемо, що в цій точці частинні похідні цієї функції не існують. Справді, $u(x;0;0) = \sqrt{x^2} = |x|$, а ця функція аргумента x не має похідної в точці $x = 0$, тобто частинна похідна $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точці $(0;0;0)$ не існує.

Аналогічно можна показати, що частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial y}$ і $\frac{\partial u}{\partial z}$ в точці O також не існують. $\blacktriangleleft$

8. Показати, що функція:

а) $z = \ln(e^x + e^y)$ задовольняє рівнянню $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$;

б) $z = y^2 \sin(x^2 - y^2)$ задовольняє рівнянню

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

► а) Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}.$$

Сума частинних похідних складе

$$\frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} = \frac{e^x + e^y}{e^x + e^y} = 1. \blacktriangleleft$$

► б) Знаходимо частинні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y^2 \cos(x^2 - y^2) 2x = 2xy^2 \cos(x^2 - y^2), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y \sin(x^2 - y^2) + y^2 \cos(x^2 - y^2)(-2y) = \\ &= 2y \sin(x^2 - y^2) - 2y^3 \cos(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Домножимо обидві частини першої рівності на y^2 , а другої – на xy і почленно додамо одержані вирази, дістанемо $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy^2 \sin(x^2 - y^2)$. Оскільки $z = y^2 \sin(x^2 - y^2)$, то права частина останньої рівності є $2xz$, що і доводить потрібне. ◀

9. Знайти повний приріст Δz і повний диференціал dz функції $z = x^2 y$ в точці $P_0(1;2)$, якщо:

- а)** $\Delta x = 1; \quad \Delta y = 2;$ **б)** $\Delta x = 0,1; \quad \Delta y = 0,2;$
в) $\Delta x = 0,01; \quad \Delta y = 0,02.$

► а) Знайдемо повний приріст і повний диференціал функції в деякій точці $P_0(x, y)$ за довільних Δx і Δy . Таким чином

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y = \\ &= (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)(y + \Delta y) - x^2 y = x^2 y + 2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + \\ &+ x^2 \Delta y + 2x\Delta x \Delta y + (\Delta x)^2 \Delta y - x^2 y = 2xy\Delta x + x^2 \Delta y + 2x\Delta x \Delta y + \\ &+ y(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2 \Delta y. \end{aligned} \quad (5)$$

Згідно означення повний диференціал функції

$$dz = 2xy\Delta x + x^2 \Delta y. \quad (6)$$

Різниця складе

$$|\Delta z - dz| = |2x\Delta x \Delta y + y(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2 \Delta y|. \quad (7)$$

Рівність (7) – це похибка, яка виникає при заміні приросту Δz функції її диференціалом dz .

Знайдемо повний приріст Δz , повний диференціал dz і похибку $|\Delta z - dz|$ при заданих числових значеннях.

Підставляючи $x = 1, y = 2, \Delta x = 1, \Delta y = 2$ в (5), (6), (7), одержимо $\Delta z = 14, dz = 6, |\Delta z - dz| = 8$. ◀

► б) При $x = 1; y = 2; \Delta x = 0,1; \Delta y = 0,2$ маємо $\Delta z = 0,062; dz = 0,6; |\Delta z - dz| = 0,062$. ◀

► в) При $x = 1; y = 2; \Delta x = 0,01; \Delta y = 0,02$ маємо $\Delta z = 0,060602; dz = 0,06; |\Delta z - dz| = 0,000602$.

З аналізу одержаних результатів видно, що у випадку зменшення приростів Δx і Δy абсолютна похибка також зменшується. ◀

10. Знайти повний диференціал функції $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$.

► Знаходимо частинні похідні: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

За формулою (1) маємо

$$dz = \frac{x}{(y + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy. \quad \blacktriangleleft$$

11. Знайти повний диференціал функції $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ в точках $P(x; y; z)$ і $P_0(1; 4; 8)$.

► Знайдемо частинні похідні: $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Тоді за формулою (2) $du(P) = -\frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, зокрема в точці P_0 диференціал дорівнюватиме

$$du(P_0) = -\frac{dx + 4dy + 8dz}{(1 + 16 + 64)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{729}(dx + 4dy + 8dz).$$

Зауваження. Функція $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, очевидно, неперервна в точці $(0; 0; 0)$, але не є диференційовною в ній, бо ж не має в ній частинних похідних (див. приклад 7е). Це доводить, що неперервність функції є тільки необхідною умовою диференційовності, але не є достатньою. ◀

12. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала величину $(1,04)^{5,001}$.

► Шукане число будемо вважати значенням функції $f(x, y) = x^y, x > 0$ при $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$. Скористаємось формулою

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y. \text{ Маємо}$$

$$f'_x = yx^{y-1}, f'_y = x^y \ln x. \text{ Поклавши } x_0 = 1; y_0 = 5; \Delta x = 0,04; \Delta y = 0,001, \text{ знайдемо}$$

$$f(x_0, y_0) = f(1; 5) = 1^5 = 1, f'_x(x_0, y_0) = f'_x(1; 5) = 5, f'_y(x_0, y_0) = f'_y(1; 5) = 0.$$

Скориставшись (3), остаточно одержимо:

$$(x + \Delta x)^{y + \Delta y} \approx x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y, \text{ тобто}$$

$$(1,04)^{5,001} \approx 1 + 5 \cdot 0,04 + 0 \cdot 0,001 = 1,2. \blacktriangleleft$$

13. Знайти частинні похідні другого порядку від функцій:

$$\text{а) } z = (x^2 + y^2)^2; \quad \text{б) } z = x^y; \quad \text{в) } z = x \cos xy^2.$$

► а) Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)'_x = 4x^3 + 4xy^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)'_y = 4x^2y + 4y^3.$$

Диференціюємо кожен з частинних похідних по x і по y :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 + 4xy^2)'_x = 12x^2 + 4y^2, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 + 4xy^2)'_y = 8xy,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4x^2y + 4y^3)'_y = 4x^2 + 12y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (4x^2y + 4y^3)'_x = 8xy. \blacktriangleleft$$

► б) Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y \ln x.$$

Потім визначаємо частинні похідні від частинних похідних першого порядку, отримуємо частинні похідні другого порядку від даної функції:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (yx^{y-1})'_x = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (yx^{y-1})'_y = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = x^{y-1}(1 + y \ln x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (x^y \ln x)'_x = yx^{y-1} \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1}(1 + y \ln x),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x^y \ln x)'_y = (x^y \ln x) \ln x = x^y (\ln x)^2. \blacktriangleleft$$

► в) Послідовно знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos xy^2 + x(-\sin xy^2)y^2 = \cos xy^2 - xy^2 \sin xy^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(-\sin xy^2)2xy = -2x^2 y \sin xy^2, \quad = -2y^2 \sin xy^2 - xy^4 \cos xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \sin xy - y^2 \sin xy^2 - xy^2 y^2 \cos xy^2 =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2xy \sin xy^2 - 2xy \sin xy^2 - xy^2 \cdot 2xy \cos xy^2 =$$

$$= xy^2 \cdot 2xy \cos xy^2 = -4xy \sin xy^2 - 2x^2 y^3 \cos xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (-2x^2 y \sin xy^2)'_x = -4xy \sin xy^2 - 2x^2 y y^2 \cos xy^2 =$$

$$= -4xy \sin xy^2 - 2x^2 y^3 \cos xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-2x^2 y \sin xy^2)'_y = -2x^2 \sin xy^2 - 2x^2 y \cos xy^2 2xy =$$

$$= -2x^2 \sin xy^2 - 4x^3 y^2 \cos xy^2. \blacktriangleleft$$

Зауваження. Ми бачимо, що в кожному з прикладів 13 мішані частинні похідні рівні між собою. Це наслідок того, що вони неперервні.

14. Знайти частинні похідні третього порядку від функції

$$z = x^4 + 3x^3 y - 4x^2 y^2 + 5xy^3 - y^4.$$

► Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2 y - 8xy^2 + 5y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 - 8x^2 y + 15xy^2 - 4y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 + 9x^2 y - 8xy^2 + 5y^3)'_x = 12x^2 + 18xy - 8y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (3x^3 - 8x^2 y + 15xy^2 - 4y^3)'_y = -8x^2 + 30xy - 12y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 + 9x^2 y - 8xy^2 + 5y^3)'_y = 9x^2 - 16xy + 15y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (3x^3 - 8x^2 y + 15xy^2 - 4y^3)'_x = 9x^2 - 16xy + 15y^2.$$

Тут варто зауважити відмінність у позначеннях $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$: символ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ означає,

що від функції z спочатку взято похідну по змінній x , а одержаний результат

продиференційовано по змінній y , тобто $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$, а $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$. Отже,

похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ відрізняються порядком (послідовністю), в якому здійснюється диференціювання.

Якщо продиференціювати по змінній y похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, то дістанемо третю похідну (похідну третього порядку) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (12x^2 + 18xy - 8y^2)'_y = 18x - 16y$.

Якщо продиференціювати по змінній x похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, то дістанемо третю похідну

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = (9x^2 - 16xy + 15y^2)'_x = 18x - 16y.$$

Аналогічно, продиференціювавши по змінній y похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, дістанемо

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = (9x^2 - 16xy + 15y^2)'_y = -16x + 30y.$$

Похідна по x від $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ є третьою похідною вигляду

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = (9x^2 - 16xy + 15y^2)'_x = 18x - 16y.$$

Похідні $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = (9x^2 - 16xy + 15y^2)'_y = -16x + 30y$ та

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = (-8x^2 + 30xy - 12y^2)'_x = -16x + 30y \text{ рівні між собою.}$$

Нарешті, похідна по x від $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ дорівнює $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24x + 18y$,

а похідна по y від $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ складе $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 30x - 24y$.

Тут варто зауважити, що похідні $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$

та $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ відрізняються тільки порядком диференціювання.

Як бачимо, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$. ◀

15. Знайти похідну $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, якщо $u = \sin(xyz)$.

► Послідовно знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\sin(xyz))'_x = yz \cos(xyz), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (yz \cos(xyz))'_y = z \cos(xyz) - xyz^2 \sin(xyz),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (z \cos(xyz) - xyz^2 \sin(xyz))'_z = \cos(xyz) - xyz \sin(xyz) -$$

$$-2xyz \sin(xyz) - x^2 y^2 z^2 \cos(xyz) = (1 - x^2 y^2 z^2) \cos(xyz) - 3xyz \sin(xyz). \quad \blacktriangleleft$$

16. Показати, що функція $z = \arctg \frac{y}{x}$ задовольняє рівнянню Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

► Знаходимо частинні похідні першого та другого порядків:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} 2x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^2} 2y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \quad \text{Підставивши знайдені}$$

$$\text{вирази } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ і } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ у ліву частину рівняння Лапласа, одержимо } \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

що й треба було довести. ◀

17. Знайти повні диференціали другого порядку функцій:

а) $z = e^{x-y^2} + \cos x$; **б)** $u = e^{xyz}$.

► а) Знайдемо частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y^2} - \sin x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x-y^2} - \cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2ye^{x-y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2ye^{x-y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2e^{x-y^2}(1-2y^2).$$

Відтак, за формулою (8) запишемо

$$d^2 z = (e^{x-y^2} - \cos x)dx^2 - 4ye^{x-y^2} dx dy + 2e^{x-y^2}(2y^2 - 1)dy^2. \quad \blacktriangleleft$$

► б) Задана функція є функцією трьох змінних. Скористаємось формулою (10). Знайдемо усі частинні похідні, які входять у цю формулу. Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (e^{xyz})'_x = yze^{xyz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (e^{xyz})'_y = xze^{xyz}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (e^{xyz})'_z = xye^{xyz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (yze^{xyz})'_x = y^2 z^2 e^{xyz}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (yze^{xyz})'_y = (z + xyz^2)e^{xyz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = (yze^{xyz})'_z = (y + xy^2 z)e^{xyz}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (xze^{xyz})'_y = x^2 z^2 e^{xyz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = (xze^{xyz})'_z = (x + x^2 yz)e^{xyz}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (xye^{xyz})'_z = x^2 y^2 e^{xyz}.$$

Підставимо знайдені

частинні похідні у формулу (10)

$$\begin{aligned} d^2 u &= (y^2 z^2 dx^2 + 2(z + xyz^2) dx dy + 2(y + xy^2 z) dx dz + x^2 z^2 dy^2 + \\ &+ 2(x + x^2 yz) dy dz + x^2 y^2 dz^2) e^{xyz} = (y^2 z^2 dx^2 + x^2 z^2 dy^2 + x^2 y^2 dz^2 + \\ &+ 2yz^2 x dx dy + 2xy^2 z dx dz + 2x^2 yz dy dz + 2z dx dy + 2y dx dz + \\ &+ 2x dy dz) e^{xyz} = ((yz dx + zxdy + xydz)^2 + 2(z dx dy + x dy dz + y dz dx)) e^{xyz}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$d^2 u = ((yz dx + zxdy + xydz)^2 + 2(z dx dy + x dy dz + y dz dx)) e^{xyz}. \quad \blacktriangleleft$$

18. Знайти $d^2 z$ послідовним диференціюванням, якщо $z = x^3 + 3x^2 y - y^3$.

► Визначимо спочатку диференціал першого порядку цієї функції. Оскільки похідні дорівнюють

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + 3x^2 y - y^3)'_x = 3(x^2 + 2xy),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + 3x^2 y - y^3)'_y = 3(x^2 - y^2),$$

$$\text{то } dz = 3(x^2 + 2xy)dx + 3(x^2 - y^2)dy.$$

Диференціюючи цю рівність, зважимо на те, що диференціали dx і dy незалежних змінних вважаємо сталими величинами, а тому виносимо їх за знак диференціала

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d[3(x^2 + 2xy)dx + 3(x^2 - y^2)dy] = (3(x^2 + 2xy)dx + \\ &+ 3(x^2 - y^2)dy)'_x dx + (3(x^2 + 2xy)dx + 3(x^2 - y^2)dy)'_y dy = 3(2x + 2y)dx^2 + 6xdydx + 6xdxdy - \\ &- 6ydy^2 = 6[(x + y)dx^2 + 2xdxdy - ydy^2]. \end{aligned} \quad (11)$$

Тепер, знаючи диференціал другого порядку, можна знайти частинні похідні другого порядку. Очевидно, що коефіцієнт при dx^2 дорівнює $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, коефіцієнт при $dx dy$ є $2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,

а коефіцієнт при dy^2 є $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Це впливає з того, що при довільних dx і dy рівність

$$Adx^2 + Bdx dy + Cdy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

справедлива тільки за умов

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A, \quad 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C.$$

Таким чином, з (11) робимо висновок, що

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6(x + y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y. \quad \blacktriangleleft$$

19. Знайти диференціал третього порядку $d^3 z$ функції $z = \cos(x + 2y^2)$.

► Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(x + 2y^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-\sin(x + 2y^2))'_x = -\cos(x + 2y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-\sin(x + 2y^2))'_y = -4y \cos(x + 2y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4 \sin(x + 2y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-4y \sin(x + 2y^2))'_y = -4 \sin(x + 2y^2) - 16y^2 \cos(x + 2y^2),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = (-\cos(x + 2y^2))'_x = \sin(x + 2y^2),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (-\cos(x + 2y^2))'_y = 4y \sin(x + 2y^2),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = (-4y \cos(x + 2y^2))'_y = -4 \cos(x + 2y^2) + 16y^2 \sin(x + 2y^2),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = (-4 \sin(x + 2y^2) - 16y^2 \cos(x + 2y^2))'_y = -16y \cos(x + 2y^2) -$$

$$-32y \cos(x + 2y^2) + 64y^3 \sin(x + 2y^2) = -48y \cos(x + 2y^2) + 64y^3 \sin(x + 2y^2).$$

За формулою (9) запишемо

$$d^3 z = \sin(x + 2y^2) dx^3 + 12y \sin(x + 2y^2) dx^2 dy + [-12 \cos(x + 2y^2) + 48y^2 \sin(x + 2y^2)] dx dy^2 + [-48y \cos(x + 2y^2) + 64y^3 \sin(x + 2y^2)] dy^3.$$

Тепер обчислимо диференціал третього порядку $d^3 z$ шляхом трьох послідовних диференціювань. Спершу маємо

$$dz = -\sin(x + 2y^2) dx - 4y \sin(x + y^2) dy = -\sin(x + 2y^2) \cdot (dx + 4y dy).$$

Диференціюючи другий раз треба пам'ятати, що диференціали dx і dy незалежних змінних треба вважати сталими величинами, а тому виносимо їх за знак диференціала

$$\begin{aligned}
d^2 z &= d(dz) = d[-\sin(x+2y^2) \cdot (dx+4ydy)] = \\
&= d[-\sin(x+2y^2)] \cdot (dx+4ydy) + [-\sin(x+2y^2)] d(dx+4ydy) = \\
&= [-\cos(x+2y^2)dx - 4y\cos(x+2y^2)dy] \cdot (dx+4ydy) + \\
&+ [-\sin(x+2y^2)] 4dydy = -\cos(x+2y^2)dx^2 - 4y\cos(x+2y^2)dydx - \\
&- 4y\cos(x+2y^2)dxdy - 16y^2\cos(x+2y^2)dy^2 - 4\sin(x+2y^2)dy^2 = \\
&= -\cos(x+2y^2)dx^2 - 8y\cos(x+2y^2)dxdy - \\
&- [16y^2\cos(x+2y^2) + 4\sin(x+2y^2)]dy^2.
\end{aligned}$$

Щоб спростити обчислення диференціала третього порядку, вираз диференціала другого порядку подамо у вигляді

$$d^2 z = -\cos(x+2y^2)(dx^2 + 8ydx dy + 16y^2 dy^2) - 4\sin(x+2y^2)dy^2.$$

$$\begin{aligned}
\text{Тоді } d^3 z &= d(d^2 z) = d[-\cos(x+2y^2)(dx^2 + 8ydx dy + 16y^2 dy^2) + \\
&+ d[-4\sin(x+2y^2)dy^2] = d[-\cos(x+2y^2)](dx^2 + 8ydx dy + \\
&+ 16y^2 dy^2) + [-\cos(x+2y^2)]d(dx^2 + 8ydx dy + 16y^2 dy^2) + \\
&+ d[-4\sin(x+2y^2)]dy^2 = [\sin(x+2y^2)dx + 4y\sin(x+2y^2)dy] \\
&(dx^2 + 8ydx dy + 16y^2 dy^2) + [-\cos(x+2y^2)](8dydx dy + 32ydy dy^2) + \\
&+ [-4\cos(x+2y^2)dx - 16y\cos(x+2y^2)dy]dy^2 = \\
&+ 16y^2 \sin(x+2y^2)dxdy^2 + 64y^3 \sin(x+2y^2)dy^3 - 8\cos(x+2y^2)dxdy^2 - 32y\cos(x+2y^2)dy^3 - \\
&- 4\cos(x+2y^2)dxdy^2 - 16y\cos(x+2y^2)dy^3 = \\
&= \sin(x+2y^2)dx^3 + 12y\sin(x+2y^2)dx^2 dy + [48y^2 \sin(x+2y^2) - 12\cos(x+2y^2)]dxdy^2 + \\
&+ [64y^3 \sin(x+2y^2) - 48y\cos(x+2y^2)]dy^3.
\end{aligned}$$

З одержаного результату видно, що коефіцієнти при dx^3 , $dx^2 dy$, $dxdy^2$, dy^3 відповідно дорівнюють

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

20. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо:

а) $z = \ln(x^2 + y^2)$, де $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$;

б) $z = \arctg \frac{x}{y}$, де $x = u \sin v$, $y = u \cos v$.

► а) Скориставшись формулами (12), знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\ln(x^2 + y^2) \right)'_x \cdot (uv)'_u + \left(\ln(x^2 + y^2) \right)'_y \left(\frac{u}{v} \right)'_u =$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2} v + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{v} = \frac{2}{u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(\ln(x^2 + y^2) \right)'_x \cdot (uv)'_v + \left(\ln(x^2 + y^2) \right)'_y \left(\frac{u}{v} \right)'_v =$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2} u + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \left(-\frac{u}{v^2} \right) = \frac{2(v^4 - 1)}{v(v^4 + 1)}. \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{б)} \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_x (u \sin v)'_u + \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_y (u \cos v)'_u =$$

$$= \frac{y^2}{x^2 + y^2} \frac{1}{y} \sin v + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \left(-\frac{x}{y^2} \right) \cos v = \frac{1}{x^2 + y^2} (y \sin v - x \cos v) =$$

$$= \frac{1}{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v} (u \sin v \cos v - u \sin v \cos v) = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_x (u \sin v)'_v + \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_y (u \cos v)'_v = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \frac{1}{y} u \cos v + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{y^4} \right) u \sin v =$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2} (yu \cos v + xu \sin v) = \frac{1}{u^2} (u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v) = 1. \blacktriangleleft$$

21. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо:

а) $z = x^y$, де $x = \sin t, y = t^2$;

б) $z = \sin \frac{x}{y}$, де $x = t^3, y = t^2 + 1$.

$\blacktriangleright$ а) Складена функція z залежить від однієї змінної t через проміжні змінні x і y , які в свою чергу залежать від змінної t . Тому за формулою (13) повна похідна цієї функції

$$\frac{dz}{dt} = (x^y)'_x \cdot (\sin t)' + (x^y)'_y \cdot (t^2)' = yx^{y-1} \cos t + x^y \ln x \cdot 2t = t^2 (\sin t)^{t^2-1} \cos t +$$

$$+ 2t (\sin t)^{t^2} \ln \sin t = t (\sin t)^{t^2-1} (t \cos t + 2 \sin t \cdot \ln \sin t). \blacktriangleleft$$

$\blacktriangleright$ б) Тут також за формулою (13) знаходимо

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sin \frac{x}{y} \right)'_x \cdot (t^3)' + \left(\sin \frac{x}{y} \right)'_y \cdot (t^2 + 1)' = \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \cdot 3t^2 - \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \cdot 2t =$$

$$= \left(3t^2 - 2t \frac{t^3}{t^2 + 1} \right) \frac{1}{t^2 + 1} \cos \frac{t^3}{t^2 + 1} = \frac{t^4 + 3t^2}{(t^2 + 1)^2} \cos \frac{t^3}{t^2 + 1}. \blacktriangleleft$$

22. Знайти $\frac{dz}{dx}$ якщо:

а) $z = \arctg \frac{y}{x}$, де $y = x^2$;

б) $z = \ln(x^2 + y^2)$, де $y = e^{x^2}$;

в) $z = \sin(3u + 2v - 4w)$, де $u = \sqrt[3]{x^2}$, $v = \sqrt{1-x^2}$, $w = \frac{\ln x}{x}$.

► а) Складена функція z залежить від змінних x та y , де y є функцією змінної x .

За формулою (14) маємо

$$\frac{dz}{dx} = \left(\arctg \frac{y}{x} \right)'_x + \left(\arctg \frac{y}{x} \right)'_y \cdot (x^2)' = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2x = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + x^2}. \blacktriangleleft$$

► б) Аналогічно $\frac{dz}{dx} = (\ln(x^2 + y^2))'_x + (\ln(x^2 + y^2))'_y \cdot (e^{x^2})' = \frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{2y}{x^2 + y^2} e^{x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + e^{2x^2}} (1 + 2e^{2x^2}). \blacktriangleleft$

► в) Складена функція z залежить від змінних u, v і w , які є функціями однієї змінної x . Формула повної похідної функції z в цьому випадку має вигляд

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dx},$$

а тому $\frac{dz}{dx} = \cos(3u + 2v - 4w) \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 2 \cos(3u + 2v - 4w) \times \times \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} - 4 \cos(3u + 2v - 4w) \frac{(\ln x - 1)}{x^2} = 2 \cos(3u + 2v - 4w) \times \times \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + \frac{2(\ln x - 1)}{x^2} \right).$

В одержаному виразі замість u, v і w потрібно підставити відповідно $\sqrt[3]{x^2}, \sqrt{1-x^2}, \ln x / x$. $\blacktriangleleft$

23. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ від функцій, заданих неявно:

а) $e^{2x} - e^{2y} = 2xy$; б) $\cos(x + y) + y = 0$.

► а) Запишемо рівняння у вигляді $e^{2x} - e^{2y} - 2xy = 0$. Розглянемо функцію $F(x, y) = e^{2x} - e^{2y} - 2xy$, знайдемо частинні похідні

$$F'_x = 2e^{2x} - 2y = 2(e^{2x} - y), \quad F'_y = -2e^{2y} - 2x = -2(e^{2y} + x).$$

Згідно (16) запишемо $\frac{dy}{dx} = -\frac{2(e^{2x} - y)}{-2(e^{2y} + x)} = \frac{e^{2x} - y}{e^{2y} + x}. \blacktriangleleft$

► 6) Тут $F(x, y) = \cos(x + y) + y$. Знаходимо частинні похідні $F'_x = -\sin(x + y)$,

$F'_y = -\sin(x + y) + 1$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x + y)}{1 - \sin(x + y)}. \blacktriangleleft$$

24. Знайти $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

► Позначимо ліву частину даного рівняння через $F(x, y)$. Тоді

$$F'_x(x, y) = y - \frac{ye^{xy} - ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}},$$

$$F'_y(x, y) = x - \frac{xe^{xy} - xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}.$$

За формулою (16) маємо $\frac{dy}{dx} = -\frac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}} = -\frac{y}{x}$.

Диференціюємо ще раз, зваживши на те, що y є функцією від x ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{y}{x} \right) = -\frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{y - x(-\frac{y}{x})}{x^2} = \frac{2y}{x^2}. \blacktriangleleft$$

25. Знайти частинні похідні першого і другого порядків функції, заданої рівнянням $z^3 - 3xyz = a^3$.

► Частинні похідні першого порядку функції $z(x, y)$ визначаємо за формулами (17):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy} \quad (z^2 \neq xy).$$

Знаходимо другі частинні похідні, зваживши при цьому на те, що $z = z(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{(z^2 - xy)y \frac{\partial z}{\partial x} - yz(2z \frac{\partial z}{\partial x} - y)}{(z^2 - xy)^2} = \\ &= \frac{(z^2 - xy)y \frac{yz}{z^2 - xy} - yz(2z \frac{yz}{z^2 - xy} - y)}{(z^2 - xy)^2} = -\frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3}, \end{aligned}$$

$$\text{аналогічно } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^3yz}{(z^2 - xy)^3},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{(z^2 - xy) \left(z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) - yz \left(2z \frac{\partial z}{\partial y} - x \right)}{(z^2 - xy)^2} = \\ &= \frac{(z^2 - xy) \left(z + \frac{xyz}{z^2 - xy} \right) - yz \left(\frac{2xz^2}{z^2 - xy} - x \right)}{(z^2 - xy)^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{z(z^4 - 2z^2xy - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3} \quad (z^2 \neq xy). \blacktriangleleft$$

26. Для заданої неявно функції $z(x, y)$ обчислити частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точці

M :

а) $x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 2y + 2z = 0, \quad M(2;3;1);$

б) $xe^y + ye^x + ze^x = 5, \quad M(2;2;3).$

► а) Позначимо ліву частину рівняння через $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 2y + 2z$.

Знаходимо частинні похідні $F'_x = 3x^2 - 3$; $F'_y = 3y^2 - 2$; $F'_z = 3z^2 + 2$.

За формулою (17) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 3}{3z^2 + 2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 - 2}{3z^2 + 2}.$$

Підставивши в одержані вирази частинних похідних $x = 2, y = 3, z = 1$, одержимо

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = -\frac{9}{5}; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = -5. \blacktriangleleft$$

► б) Позначимо $F(x, y, z) = xe^y + ye^x + ze^x - 5$. Тоді частинні похідні

$$F'_x = e^y + ye^x + ze^x, \quad F'_y = xe^y + e^x, \quad F'_z = e^x.$$

За формулами (17) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^y + (y+z)e^x}{e^x} = -y - z - e^{y-x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xe^y + e^x}{e^x} = -1 - xe^{y-x}.$$

$$\text{Отже, } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = -6; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = -3. \blacktriangleleft$$

27. Знайти dz і d^2z , якщо $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$.

► Продиференціюємо цю рівність, зваживши на те, що $z = z(x, y)$. Одержимо

$$\frac{zdx - xdz}{z^2} = \frac{y}{z} \frac{ydz - zdy}{y^2}, \text{ або}$$

$$yzdx - x y dz - y z dz + z^2 dy = 0. \quad (18)$$

Звідси

$$dz = \frac{z(ydx + zdy)}{y(x+z)} \quad (x \neq -z). \quad (19)$$

Продиференціюємо рівність (18), виконаємо деякі спрощення і одержимо $y(x+z)d^2z = zdx dy + (zdy - xdy)dz - ydz^2$.

Відтак, враховуючи рівність (19), запишемо

$$d^2z = -\frac{z^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x+z)^3} \quad (x \neq -z). \quad \blacktriangleleft$$