

Завдання для самостійного розв'язання

7. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = 3x^2 + xy^3 + y^2$; б) $z = \frac{x}{y} + \cos xy - \ln(x^2 + y^2)$;

в) $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$; г) $z = x^n + y^n$;

д) $z = \cos(ax + by)$; е) $u = ax + by + cz$;

є) $z = y \sin x + \sin y$; ж) $z = x^{\sin y} (x > 0)$;

з) $u = z^{xy} (z > 0)$; и) $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2 \cdot \sqrt[3]{z^2}$.

8. Показати, що функція задовольняє заданому рівнянню:

а) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = -1$;

б) $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$.

9. Знайти повний приріст Δz і повний диференціал dz функції $z = x^3 y^2$ в точці $P_0(2;1)$, якщо:

а) $\Delta x = -0,1$; $\Delta y = -0,1$; б) $\Delta x = -0,01$; $\Delta y = -0,01$.

10. Знайти повні диференціали заданих функцій:

а) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; б) $z = x \sin y + y \sin x$;

в) $z = \frac{\operatorname{arctg} y}{1+x^2}$; г) $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$;

д) $z = \arcsin \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; е) $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$.

11. Знайти диференціали:

а) $du(2;2;2)$, якщо $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;

б) $du(0;2;3)$, якщо $u = e^{\sin \frac{xz}{y}}$.

12. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала величини:

а) $(0,97)^{2,02}$; б) $(1,003)^{2,07}$; в) $\sqrt{(6,03)^2 + (8,04)^2}$.

13. Знайти частинні похідні другого порядку від функцій:

а) $z = \ln(x^2 + y^2)$; б) $z = e^{xy}$; в) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

14. Перевірити, чи задовольняє функція $z = e^{xy}$ рівняння:

$$\text{а) } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0;$$

$$\text{б) } x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$$

15. Знайти частинні похідні третього порядку:

$$\text{а) } \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \text{ і } \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \text{ якщо } z = \cos(ax + e^y);$$

$$\text{б) } \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \text{ і } \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \text{ якщо } z = \sin xy;$$

16. Знайти диференціал другого порядку d^2u , якщо:

$$\text{а) } u = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \text{б) } u = x \ln \frac{y}{x}; \quad \text{в) } u = e^{x-2y+z}.$$

17. Знайти d^3z , якщо:

$$\text{а) } z = e^y \sin x; \quad \text{б) } z = x \sin y + y \cos x.$$

18. Послідовним диференціюванням знайти:

$$\text{а) } d^2z, \text{ якщо } z = y + e^{xy};$$

$$\text{б) } d^3z, \text{ якщо } z = x^4y - xy^4.$$

19. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо:

$$\text{а) } z = x^2 - y^2, \text{ а } x = uv, \quad y = \frac{u}{v+1};$$

$$\text{б) } z = \arctg \frac{x}{y}, \text{ де } x = u + v, \quad y = u - v.$$

20. Знайти повну похідну $\frac{dz}{dt}$, якщо:

$$\text{а) } z = \sin \frac{x}{y}, \text{ де } x = e^t, y = t^2;$$

$$\text{б) } z = e^{x^2+y^2}, \text{ де } x = a \cos t, y = a \sin t.$$

21. Знайти $\frac{dz}{dx}$, якщо:

$$\text{а) } z = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ де } y = \sin^2 x;$$

$$\text{б) } z = \ln(x^2 - y^2), \text{ де } y = e^x.$$

22. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ від функцій, заданих неявно:

$$\text{а) } x - y + \operatorname{arctg} y = 0, \quad \text{б) } \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

23. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій, заданих неявно, в точці M :

$$\text{а) } 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz + x = 4, \quad M(1; -5; -1);$$

$$\text{б) } x + y + z = e^x, \quad M(0; -1; 2).$$

24. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, якщо

$$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0.$$

25. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $x + y + z = e^z$.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

$$7. \text{ а) } \frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3xy^2 + 2y;$$

$$\text{б) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} - y \sin xy - \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - x \sin xy - \frac{2y}{x^2 + y^2};$$

$$\text{в) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x};$$

$$\text{г) } \frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ny^{n-1};$$

$$\text{д) } \frac{\partial z}{\partial x} = -a \sin(ax + by), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -b \sin(ax + by);$$

$$\text{е) } \frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = c \quad (\text{диференціюючи по змінній } x, \text{ дві інші змінні } y \text{ і } z$$

вважаємо сталими, а тому похідні по x від by і cz рівні нулю);

$$\text{є) } \frac{\partial z}{\partial x} = y \cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x + \cos y;$$

$$\text{ж) } \frac{\partial z}{\partial x} = x^{\sin y - 1} \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^{\sin y} \cos y \ln x$$

(тут, диференціюючи по x , задану функцію вважають степеневою: основа степеня x — величина змінна, а показник степеня $\sin y$ — величина стала; аналогічно, диференціюючи по y , величину x вважають сталою, а $\sin y$ — змінною, тому функцію $x^{\sin y}$ — показниковою);

$$3) \frac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy} \ln z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy} \ln z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1};$$

$$н) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}.$$

$$9. а) \Delta z = -2,4442; \quad dz = -2,8;$$

$$б) \Delta z = -0,2762; \quad dz = -0,2800.$$

$$10. а) dz = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2};$$

$$б) dz = (\sin y + y \cos x)dx + (\sin x + x \cos y)dy;$$

$$в) dz = \frac{(1+x^2)dy - 2x(1+y^2)\arctg y dx}{(1+x^2)^2(1+y^2)};$$

$$г) dz = \frac{2ydx - 2xdy}{y^2 \sin \frac{2x}{y}};$$

$$д) dz = \frac{xy\sqrt{2}(ydx - xdy)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2y^2 - y^4}};$$

$$е) du = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} dx - (e^{\frac{x}{y}} \frac{x}{y^2} + e^{\frac{z}{y}} \frac{z}{y^2}) dy + \frac{1}{y} e^{\frac{z}{y}} dz.$$

$$11. а) du(2;2;2) = \frac{1}{3}(dx + dy + dz);$$

$$б) du(0;2;3) = \frac{3}{2} dx.$$

$$12. а) 0,94; \quad б) 1,006; \quad в) 10,05. \text{ (вказівка: у випадку 12.в розглянути функцію}$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$13. а) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$б) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy}(xy + 1), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy};$$

$$в) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)}.$$

$$15. а) \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ae^y(e^y \sin(ax + e^y) - \cos(ax + e^y)),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = a^2 e^y \sin(ax + e^y);$$

$$\text{б)} \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -2x \sin xy - x^2 y \cos xy,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -2y \sin xy - xy^2 \cos xy;$$

$$16. \text{ а)} d^2 u = \frac{y^2 dx^2 - 2xy dx dy + x^2 dy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{б)} d^2 u = -\frac{1}{x} dx^2 + \frac{2}{y} dx dy - \frac{x}{y^2} dy^2 = -\frac{(y dx - x dy)^2}{xy^2};$$

$$\text{в)} d^2 u = e^{x-2y+z} (dx^2 - 4dx dy + 2dx dz + 4dy^2 - 4dy dz + dz^2).$$

$$17. \text{ а)} d^2 z = e^y (-\cos x dx^3 - 3 \sin x dx^2 dy + 3 \cos x dx dy^2 + \sin x dy^3);$$

$$\text{б)} d^2 z = y \sin x dx^3 - 3 \cos x dx^2 dy - 3 \sin y dx dy^2 - x \cos y dy^3.$$

$$18. \text{ а)} d^2 z = e^{xy} (y^2 dx^2 + 2(xy + 1) dx dy + x^2 dy^2);$$

$$\text{б)} d^3 z = 12(2xy dx^3 + 3x^2 dx^2 dy - 3y^2 dx dy^2 - 2xy dy^3).$$

$$19. \text{ а)} \frac{\partial z}{\partial u} = 2uv^2 - \frac{2u}{(v+1)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2u^2 v + \frac{2u^2}{(v+1)^3};$$

$$\text{б)} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y-x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

$$20. \text{ а)} \frac{dz}{dt} = (t-2) \frac{e^t}{t^3} \cos \frac{e^t}{t^2};$$

$$\text{б)} \frac{dz}{dt} = (2ae^{x^2+y^2} (y \cos t - x \sin t)) = 0.$$

$$21. \text{ а)} \frac{dz}{dx} = \frac{x + \sin^2 x \sin 2x}{\sqrt{x^2 + \sin^4 x}}; \quad \text{б)} \frac{dz}{dx} = \frac{2(x - ye^x)}{x^2 - y^2}.$$

$$22. \text{ а)} \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{y^2}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2(1+y^2)}{y^5};$$

$$\text{б)} \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

$$23. \text{ а)} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = -4, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = 20;$$

$$\text{б)} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = 0, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = -1.$$

$$24. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2-x}{1+z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1+z}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y(x-2)}{(1+z)^3}.$$

$$25. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}.$$