

§ 3. Деякі застосування частинних похідних

3.1 Дотична площина та нормаль до поверхні

Дотичною площиною до поверхні в точці M_0 називається площина, яка містить в собі дотичні до всіх кривих, проведених на поверхні через цю точку.

Нормаллю до поверхні в точці M_0 називається пряма, яка проходить через цю точку і перпендикулярна до дотичної площини.

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, де частинні похідні $f'_x(\tilde{M}_0)$ і $f'_y(\tilde{M}_0)$ в точці $\tilde{M}_0(x_0; y_0)$ скінченні (і не можуть бути рівні нулю одночасно), то *рівняння дотичної площини* до поверхні в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0), \quad (20)$$

а *рівняння нормалі*

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (21)$$

Рівність нулю, наприклад $f'_x(x_0; y_0) = 0$, означає, що дотична площина паралельна осі Ox , а нормаль лежить у площині $x = x_0$.

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x; y; z) = 0$ і в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ частинні похідні $F'_x(M_0)$, $F'_y(M_0)$, $F'_z(M_0)$ скінченні і не перетворюються в нуль одночасно, то *рівняння дотичної площини* до поверхні в цій точці має вигляд

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0, \quad (22)$$

а *рівняння нормалі* в цій же точці

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (23)$$

3.2 Похідна за напрямом та градієнт функції

Похідною функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overline{M_0M}$ називається границя

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{|M_0M|} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\rho},$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Якщо функція $f(x, y)$ диференційовна, то похідна за даним напрямом обчислюється за формулою

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha, \quad (24)$$

де α – кут, утворений вектором $\vec{l}$ з додатним напрямом осі Ox .

У випадку функції трьох аргументів $u = f(x, y, z)$ похідна за даним напрямом визначається аналогічно

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (25)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни функції за даним напрямом.

Градiєнтом функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ називається вектор

з початком в точці M , координатами якого є значення частинних похідних функції Z в цій точці

$$\overrightarrow{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}. \quad (26)$$

Градiєнт функції в даній точці задає напрям найшвидшого росту функції в заданій точці. Похідна $\frac{\partial z}{\partial l}$

за напрямом градієнта має найбільше значення, яке дорівнює $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\text{найб.}} = |\overrightarrow{grad} z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$.

Градiєнт функції $z = f(x, y)$ і похідна за напрямом вектора $\vec{l}$ зв'язані формулою $\frac{\partial z}{\partial l} = \text{pr}_{\vec{l}} \overrightarrow{grad} z$.

Для функцій трьох змінних її градієнт

$$\overrightarrow{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (27)$$

Градiєнт функції в кожній точці напрямлений по нормалі до відповідної лінії (поверхні) рівня.

3.3 Формула Тейлора для функції двох змінних

Якщо функція $f(x, y)$ диференційовна до n -го порядку в деякому околі точки $P_0(x_0, y_0)$, то для будь-якої точки (x, y) з цього околу справджується формула Тейлора

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + (f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)) + \\ & + \frac{1}{2!} (f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \\ & + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) + \dots + \frac{1}{n!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + o(\rho^n), \end{aligned} \quad (28)$$

де $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ (залишковий член у формі Пеано). При $x_0 = y_0 = 0$ одержуємо формулу Маклорена.

3.4 Екстремуми функції

Нехай функція $u = f(M)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0, \dots, t_0)$.

Функція $u = f(M)$ має в точці M_0 *локальний максимум (мінімум)*, якщо існує такий окіл точки M_0 , що для всіх точок з цього околу при $M \neq M_0$ виконується умова $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$).

Максимум чи мінімум функції називають її локальним екстремумом (або просто екстремумом). Точка M_0 , в якій функція має екстремум, називається *точкою екстремуму*.

Необхідні умови екстремуму. Якщо диференційовна функція $u = f(M)$ має в точці M_0 екстремум, то її частинні похідні першого порядку в цій точці рівні нулю, тобто

$$f'_x(M_0) = 0, \quad f'_y(M_0) = 0, \quad f'_z(M_0) = 0, \quad \dots, \quad f'_t(M_0) = 0 \quad (29)$$

або $du(M_0) = 0$.

Точка, в якій виконуються умови (29), називається *стаціонарною точкою* даної функції $u = f(M)$. Не всяка стаціонарна точка є точкою екстремуму.

Якщо M_0 – точка екстремуму функції $u = f(M)$, то або M_0 – стаціонарна точка, або в цій точці функція не є диференційованою.

Достатні умови екстремуму. Щоб визначити, при яких значеннях незалежних змінних, одержаних із рівнянь (29), функція має максимум або мінімум, досліджують диференціал другого порядку цієї функції.

Якщо при значеннях незалежних змінних, знайдених із рівнянь (29), диференціал другого порядку $d^2u(M_0)$ функції зберігає сталий знак при всіх можливих досить малих за абсолютною величиною приростах незалежних змінних, то функція при цих значеннях має екстремум, зокрема, максимум, коли диференціал другого порядку від'ємний, а мінімум – коли він додатний.

Якщо диференціал другого порядку $d^2u(M_0)$ при значеннях незалежних змінних, знайдених із системи рівнянь (29), не зберігає сталого знака, то для таких значень функція не має ні максимуму, ні мінімуму.

Якщо виявиться, що при цих значеннях диференціал другого порядку $d^2u(M_0) = 0$, то екстремум може бути, а може й не бути (потрібно досліджувати диференціали вищого порядку).

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ необхідні умови існування екстремуму функції наступні: функція $z = f(x, y)$ може мати екстремум лише у точках, в яких $f'_x = 0$ і $f'_y = 0$.

Для з'ясування достатніх умов існування екстремуму функції $z = f(x, y)$ введемо позначення: $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$. Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремум, а саме – максимум при $A < 0$ ($C < 0$) і мінімум при $A > 0$ ($C > 0$);

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $M_0(x_0, y_0)$ немає;

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні додаткові дослідження.

3.5 Найбільше і найменше значення функції

Якщо функція $u = f(M)$ неперервна в обмеженій замкненій області D , то за теоремою Вейєрштрасса вона досягає своїх *найбільшого* та *найменшого* значень, або в стаціонарній точці усередині області, або в межевій точці. Щоб знайти найбільше та найменше значення функції потрібно:

- 1) знайти стаціонарні точки, що належать області D , і обчислити значення функції в цих точках;
- 2) знайти найбільше та найменше значення функції на лініях, які утворюють межу області;
- 3) серед усіх знайдених значень вибрати найбільше та найменше; вони й будуть найбільшим та найменшим значеннями функції в усій області D .

У деяких випадках при знаходженні найбільших та найменших значень функції в обмеженій замкненій області межу цієї області зручно розбити на частини, кожна з яких задається своїм рівнянням. Найбільше та найменше значення функції називають *глобальними екстремумами*.

3.6 Умовний екстремум

Умовним екстремумом функції $z = f(x, y)$ називають локальний екстремум цієї функції, який досягається за умови, що змінні x та y задовольняють умову зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ (рівняння в'язі).

Розв'язання такої задачі зводиться до дослідження на звичайний екстремум функції Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y), \quad (30)$$

де λ – множник Лагранжа.

Необхідні умови екстремуму функції Лагранжа виражаються системою рівнянь

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda \phi'_x(x, y) = 0, \\ F'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda \phi'_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (31)$$

З цієї системи визначаються невідомі x_0, y_0, λ_0 , де x_0, y_0 – координати точки, в якій можливий умовний екстремум.

Достатні умови умовного екстремуму пов'язані з вивченням знаку другого диференціала функції Лагранжа в точці можливого екстремуму

$$d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) = F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0)dx^2 + 2F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0)dxdy + F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0)dy^2. \quad (32)$$

Якщо $d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка умовного мінімуму.

Якщо $d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка умовного максимуму.

При дослідженні знаку d^2F треба зважити на те, що диференціали змінних dx, dy в $d^2F(x_0, y_0, \lambda_0)$ залежні і ця залежність диктується рівнянням в'язі.

Аналогічно знаходяться умовні екстремуми для функцій трьох і більшої кількості змінних.