

Завдання для самостійного розв'язання

26. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні:

а) $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точці $A(1;0;0)$;

б) $z = \arctg \frac{y}{x}$ в точці $A(1;1;\frac{\pi}{4})$;

в) $z = 2x^2 + y^2$ в точці $A(1;1;3)$.

27. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точці $B(a;b;c)$;

б) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ в точці $A(2;2;1)$;

в) $x^2 + y^2 - x + 2y + 4z - 13 = 0$ в точці $P(2;1;2)$.

28. Знайти похідну функції $z = x^2 - y^2$ в точці $M(1;1)$ за напрямом вектора $\vec{l}$, який утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\alpha = 60^\circ$.

29. Знайти похідну функції $u = xyz^3$ в точці $P_1(3;2;1)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$, де $P_2(5;4;2)$.

30. Знайти величину і напрям градієнта функції $u = \operatorname{tg} x - x + 3 \sin y - \sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z$ в точці $P(\pi/4; \pi/3; \pi/2)$.

31. Знайти величину і напрям градієнта функції $u = xyz$ в точці $M(-2;3;4)$.

32. Функцію $f(x, y) = x^3 - 2y^2 + 3xy$ розвинути за формулою Тейлора в околі точки $A(2;1)$.

33. Розвинути функцію $f(x, y) = y^x$ за формулою Тейлора в околі точки $M(1;1)$ до членів 2-го порядку включно.

34. Розвинути за формулою Маклорена до членів третього порядку включно функцію $f(x, y) = e^y \cos x$.

35. Дослідити на екстремум такі функції двох змінних:

а) $z = x^3 - 3x^2 - 3y^2 - 4y$;

б) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$;

в) $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$;

г) $z = e^{x+2y}(y^2 - x^2)$;

д) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

36. Дослідити на екстремум такі функції трьох змінних:

а) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;

б) $u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$.

37. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ у прямокутнику з вершинами

$A(1; -3), B(1; 2), C(4; 2), D(4; -3)$ ($1 \leq x \leq 4, -3 \leq y \leq 2$).

38. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2y + xy^2 + xy$ в замкненій області, яка обмежена лініями $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 2, y = -\frac{3}{2}$.

39. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy$ в замкненій трикутній області D з вершинами в точках $O(0;0), A(1;0), B(0;2)$.

40. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy^2$ в крузі $x^2 + y^2 \leq 1$.

41. З картону заданої площі s потрібно виготовити закриту коробку (прямокутний паралелепіпед) найбільшої місткості. Якими повинні бути її розміри?

42. Знайти умовні екстремуми функцій:

а) $z = xy$ за умови $2x + 3y - 5 = 0$;

б) $z = x^2 + 2y$ за умови $x^2 + y^2 = 5$;

в) $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ за умови $x + y - 4 = 0$;

г) $u = 2x + y - 2z$ за умови $x^2 + y^2 + z^2 = 36$;

д) $z = xy^2z^3$ за умови $x + 2y + 3z = 12$ ($x > 0, y > 0, z > 0$).

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

26. а) $2x - z - 2 = 0, \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$;

б) $x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0, \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{2}$;

в) $4x + 2y - z - 3 = 0, \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$.

27. а) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 1, \frac{\frac{x-a}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{y-b}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{\frac{z-c}{-2}}{\frac{-2}{c}}$;

б) $x + y - 4z = 0, \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}$;

$$\text{в)} \quad 3x + 4y + 4z - 18 = 0, \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{4}.$$

$$28. \quad \left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_M = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3} \approx -0,7.$$

$$29. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_{P_1} = 22 \frac{2}{3}.$$

$$30. \quad \overrightarrow{\text{grad}} u(P) = \vec{i} + \frac{3}{8} \vec{j}, \quad |\overrightarrow{\text{grad}} u(P)| = \sqrt{73}/8,$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{73}}, \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{73}}, \quad \cos \gamma = 0.$$

$$31. \quad \overrightarrow{\text{grad}} u(M) = 12\vec{i} - 8\vec{j} - 6\vec{k}, \quad |\overrightarrow{\text{grad}} u(M)| = 2\sqrt{61}.$$

$$32. \quad f(x, y) = 12 + 15(x-2) + 6(x-2)^2 + 3(x-2)(y-1) - 6(y-1)^2 + \\ + (x-2)^3 - 2(y-1)^3.$$

$$33. \quad y^x = 1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + o(\rho^2), \text{ де}$$

$$\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$

$$34. \quad f(x, y) = 1 + y + \frac{1}{2!}(y^2 - x^2) + \frac{1}{3!}(y^3 - 3x^2y) + o(\rho^3), \text{ де}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$35. \text{ а)} \quad M_1\left(0; -\frac{2}{3}\right), \quad M_2\left(2; -\frac{2}{3}\right) - \text{стаціонарні точки;}$$

$$z_{\max} = f(M_1) = \frac{4}{3}, \text{ в точці } M_2 \text{ екстремуму немає;}$$

б) мінімум в точці $M_2(5;6)$, $z_{\min} = -86$; в іншій стаціонарній точці $M_2(1;-6)$ екстремуму немає;

$$\text{в)} \quad z_{\min} = f\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27};$$

$$\text{г)} \quad z_{\max} = f\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}e^{-2};$$

$$\text{д)} \quad z_{\min} = f(2;1) = -28, \quad z_{\max} = f(-2;-1) = 28.$$

$$36. \text{ а)} \quad u_{\min} = u\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right) = -\frac{4}{3};$$

$$\text{б)} \quad u_{\min} = u(1;-1;3) = -11.$$

$$37. \quad z_{\text{найб}} = 9 \text{ в точці } (1;2); \quad z_{\text{найм}} = -11 \text{ в точці } (3;-2).$$

38. $z_{\text{найб}} = 3,5$ в точці $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; $z_{\text{найм}} = -4,5$ в точці $\left(2; -\frac{3}{2}\right)$.

39. $z_{\text{найб}} = z\left(\frac{1}{2}; 1\right) = \frac{1}{2}$, $z_{\text{найм}} = z(0; 0) = 0$.

40. $z_{\text{найб}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$;

$z_{\text{найм}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

41. Куб з ребром $\frac{\sqrt{6}s}{6}$.

42. а) $z_{\text{max}} = f(M_0) = \frac{25}{24}$, $M_0\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ – точка умовного максимуму;

б) $z_{\text{max}} = f(M_1) = f(M_2) = 6$, $M_1(-2; 1)$ та $M_2(2; 1)$ – точки умовного максимуму;

$z_{\text{min}} = f(M_3) = -2\sqrt{5}$, $M_3(-\sqrt{5}; 0)$ – точка умовного мінімуму.

в) $z_{\text{min}} = f(M_0) = \frac{15}{4}$, $M_0\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ – точка умовного мінімуму.

г) $u_{\text{max}} = u(M_1) = 18$, $M_1(4; 2; -4)$ – точка умовного максимуму; $u_{\text{min}} = u(M_2) = -18$,

$M_2(-4; -2; 4)$ – точка умовного мінімуму.

д) $u_{\text{max}} = u(M_0) = 64$, $M_0(2; 2; 2)$ – точка умовного максимуму.