

Завдання для самостійного розв'язання

1. Розв'язати рівняння:

а) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$;

б) $2xy^2dx - ydy = yx^2dy - 6xdx$;

в) $x \cdot y' \ln y - y = 0$;

г) $\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0$;

д) $6xdx - 2x^2ydy = 6ydy - 3xy^2dx$.

2. Швидкість розпаду радію пропорційна його кількості. Протягом року з кожного грама радію розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радію?

3. Температура вийнятої з печі хлібини протягом 20 хвилин зменшується від 200 до 150°C. Температура повітря є сталою і дорівнює 25°C. Через скільки часу від початку охолодження температура хлібини понизиться до 30°C?

4. Скласти рівняння кривої, що проходить через точку $M(2; -3)$ та має дотичну з кутовим коефіцієнтом $k = 4x - 3$.

5. Швидкість здешевлення обладнання внаслідок його зношування пропорційна в кожний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість обладнання A_0 млн. грн. Якою буде вартість обладнання через t років?

6. Знайти частинний розв'язок рівняння:

а) $(2xy + y)y' = 3 - y^2, \quad y(0) = 2$;

б) $y' = (2y - 3)\operatorname{tg} x, \quad y(2\pi) = 6$;

в) $y' + e^x = yy', \quad y(0) = 2$;

г) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$.

7. Розв'язати диференціальне рівняння:

а) $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$;

б) $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0$;

в) $(\sin 2x - 2\cos(x+y))dx - 2\cos(x+y)dy = 0$;

г) $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$;

д) $xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0$;

е) $(6y + x + \frac{3}{x})dy + (\frac{3y^2}{x} + 2y + 2)dx = 0$.

8. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } (xy' - y) \operatorname{ctg} \frac{y}{x} = x; \quad \text{б) } x^2 y' = y^2 + 6xy + 6x^2;$$

$$\text{в) } y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; \quad \text{г) } xy' = y \cos \ln \frac{y}{x};$$

$$\text{д) } xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

9. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$\text{а) } (x - y) y dx - x^2 dy = 0, \quad y(1) = 1;$$

$$\text{б) } (x + 2y) dx - x dy = 0, \quad y(1) = 2.$$

$$\text{в) } y' + \frac{y}{x} \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) - 1 \right) = 0, \quad y(1) = 2.$$

10. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } (12x - 5y - 3) dx - (2x - y - 1) dy = 0;$$

$$\text{б) } (-12x + 11y + 10) dx + (-10x + y - 8) dy = 0;$$

$$\text{в) } (3x - 7y + 1) dx + (3x + y - 7) dy = 0;$$

$$\text{г) } (3x - y + 1) dx + (5x + y - 9) dy = 0.$$

11. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } y' + \frac{y}{x} = 3x; \quad \text{б) } y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x;$$

$$\text{в) } y' - \frac{y}{x} = x^2; \quad \text{г) } y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1;$$

$$\text{д) } y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2.$$

12. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$\text{а) } y' - \frac{y}{x+1} = e^x (x+1), \quad y(0) = 1;$$

$$\text{б) } y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1, \quad y(1) = 3;$$

$$\text{в) } y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4;$$

$$\text{г) } y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = \frac{1}{2};$$

$$\text{д) } y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

13. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } y' + yx = x^3 y^3; \quad \text{б) } y' - xy = 3xy^2; \quad \text{в) } y' + \frac{2y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x}.$$

14. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$\text{а) } y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2 (x^3 + 1) \cdot \sin x, \quad y(0) = 1;$$

$$\text{б) } xdy = (x^5 y^2 - 2y)dx, \quad y(1) = 1.$$

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

$$1. \text{ а) } C(1 + x^2) = 1 + e^y; \quad \text{б) } C(x^2 + 1) = \sqrt{y^2 + 3};$$

$$\text{в) } \ln^2 y = 2 \ln |Cx|; \quad \text{г) } y^2 + 2 = C\sqrt{(x^2 + 3)^3};$$

$$\text{д) } \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 y = C.$$

$$2. 1590 \text{ років. } 3. -20 \frac{\ln 35}{\ln \frac{5}{7}} \approx 211,33.$$

$$4. y = 2x^2 - 3x - 5. \quad 5. A_t = A_0 e^{-kt}.$$

$$6. \text{ а) } (y^2 - 3)(2x + 1) = -1; \quad \text{б) } \cos x \cdot \sqrt{2y - 3} = 3;$$

$$\text{в) } \frac{y^2}{2} - y = e^x - 1; \quad \text{г) } y = 2.$$

$$7. \text{ а) } x^3 e^y - y = C; \quad \text{б) } x e^y + \sin y = C;$$

$$\text{в) } -\frac{1}{2} \cos 2x - 2 \sin(x + y) = C; \quad \text{г) } x y^3 + \sin x + e^y = C;$$

$$\text{д) } yx - \ln y = C; \quad \text{е) } 3yx^2 + \frac{x^3}{3} + 3x + xy^2 + 2xy = C.$$

$$8. \text{ а) } \sin \frac{y}{x} = Cx; \quad \text{б) } \frac{y + 2x}{y + 3x} = Cx; \quad \text{в) } y^2 = 2x^2 \ln |Cx|;$$

$$\text{г) } \ln |Cx| = \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{y}{x} \right); \quad \text{д) } \sin \frac{y}{x} = Cx.$$

$$9. \text{ а) } y = \frac{x}{\ln(ex)}; \quad \text{б) } y = 3x^2 - x; \quad \text{в) } \frac{\ln 2}{x} = \ln \frac{y}{x}.$$

$$10. \text{ а) } \frac{y - 3x}{(y - 4x - 1)^2} = C; \quad \text{б) } \frac{(y + 4x + 6)^2}{y - 3x - 1} = C;$$

$$\text{в) } \frac{y - x + 1}{(y - 3x + 5)^2} = C; \quad \text{г) } \frac{y + 3x - 7}{(y + x - 5)^2} = C.$$

$$11. \text{ а) } y = x^2 + \frac{C}{x}; \quad \text{б) } y = \sin x \cos x + C \cos x; \quad \text{в) } y = \frac{x^3}{2} + Cx;$$

$$\text{г)} y = x \ln x + \frac{C}{x}; \quad \text{д)} y = (1+x^2)(x+C).$$

$$12. \text{ а)} y = e^x(x+1); \quad \text{б)} y = x \ln x + \frac{3}{x}; \quad \text{в)} y = \frac{4}{x^2};$$

$$\text{г)} y = x^2 + \frac{1}{2}; \quad \text{д)} y = \frac{(x+1)^4}{2}.$$

$$13. \text{ а)} \frac{1}{y^2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2}; \quad \text{б)} \frac{1}{y} = Ce^{-\frac{x^2}{2}} - 3;$$

$$\text{в)} \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} + Cx^2.$$

$$14. \text{ а)} y = \frac{\sec x}{x^3 + 1}; \quad \text{б)} \frac{1}{y} = \frac{4x^2 - x^5}{3}.$$