

§ 2. Диференціальні рівняння вищих порядків

2.1 Загальні поняття та означення

Рівняння

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (56)$$

де x – незалежна змінна, y – шукана функція, а функція F визначена і неперервна в деякій області $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ ($n \geq 1$) та обов'язково залежить від $y^{(n)}$, називається звичайним диференціальним рівнянням n -го порядку.

Диференціальне рівняння n -го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (57)$$

де функцію f також вважають неперервною в деякій області $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ зміни своїх аргументів.

Розв'язком рівняння (57) на інтервалі (a, b) називається функція $y(x)$, яка задовольняє умови:

- 1) $y(x)$ неперервно диференційовна на (a, b) до n -го порядку включно;
- 2) $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in D \quad \forall x \in (a, b)$;
- 3) $y(x)$ перетворює рівняння (2) у тотожність, тобто

$$y^{(n)}(x) \equiv f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in (a, b).$$

Аналогічно визначається розв'язок рівняння (56).

Задачею Коші для рівняння (56) або (57) називається задача знаходження розв'язку $y(x)$ рівняння (56) або (57), що задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (58)$$

де $x_0 \in (a, b)$, $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа.

Має місце теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші (57)-(58).

Теорема Коші. Якщо функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ як функція $n+1$ змінної є неперервною і має неперервні частинні похідні по аргументах $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ в деякій області $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, що містить точку $M_0(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$, то існує єдиний розв'язок рівняння (57), що задовольняє початкові умови (58).

Загальним розв'язком диференціального рівняння (57) називається функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (59)$$

яка залежить від n довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, така, що:

- 1) при довільному конкретному наборі сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ вона є розв'язком диференціального рівняння (57);
- 2) для будь-якої точки $M_0(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ з області D , вказаної у теоремі Коші, сталі $C_1, C_2, \dots, C_n$ можна підібрати такими, що функція (59) буде задовольняти початкові умови (58).

Кожна функція, яка одержується із загального розв'язку при конкретних значеннях сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, називається частинним розв'язком диференціального рівняння (57).

Зауважимо, що не завжди загальний розв'язок диференціального рівняння n -го порядку вдається отримати у вигляді (59). Здебільшого у процесі розв'язування одержуємо співвідношення виду

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

яке визначає загальний розв'язок у неявному вигляді. Таке співвідношення називається *загальним інтегралом диференціального рівняння n -го порядку*, а співвідношення, яке одержується із загального інтеграла при конкретних значеннях сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, називається *частинним інтегралом*.

2.2 Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають пониження порядку

Розглянемо деякі типи рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку:

Перший тип. Загальний розв'язок рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x) \quad (60)$$

знаходимо методом n -кратного інтегрування.

Другий тип. Нехай диференціальне рівняння n -го порядку не містить у явному виді шуканої функції та її похідних до $(k-1)$ -го порядку включно $(1 \leq k \leq n)$

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (61)$$

Тоді вводимо нову невідому функцію $z(x) = y^{(k)}(x)$ і, враховуючи, що $y^{(k+1)} = z'$, $y^{(k+2)} = z''$, ..., $y^{(n)} = z^{(n-k)}$, приходимо до рівняння $(n-k)$ -го порядку відносно невідомої функції $z(x)$

$$F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0, \quad (62)$$

тобто понижуємо порядок рівняння на k одиниць. Якщо вдається знайти загальний розв'язок цього рівняння у вигляді $z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$, то одержимо диференціальне рівняння попереднього виду

$$z = y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}), \quad (63)$$

розв'язок якого знаходять k -кратним інтегруванням.

Третій тип. Розглянемо диференціальне рівняння n -го порядку, яке не містить явно незалежної змінної x ,

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (64)$$

В цьому випадку порядок рівняння завжди можна понизити на одиницю, ввівши нову невідому функцію $p(y) = y'$, де y приймаємо за аргумент. Похідні $y'', y''', \dots, y^{(n)}$ треба виразити через похідні цієї нової функції по аргументу y , враховуючи правило диференціювання складеної функції:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p, \quad (65)$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dp}{dy} p \right) = \frac{d^2 p}{dy^2} p p + \frac{dp}{dy} \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 p \text{ і т.д.}$$

2.3 Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Серед диференціальних рівнянь вищих порядків важливе місце посідають рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (65)$$

де $f(x)$, $a_i(x)$ – неперервні на деякому інтервалі функції, зокрема, вони можуть бути і сталими. Таке рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку

Більш загальний вигляд цього рівняння

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (66)$$

де $a_0(x) \neq 0$, зводиться до виду (65) діленням обох частин на $a_0(x)$.

Якщо права частина рівняння (65) тотожно дорівнює нулю, тобто $f(x) \equiv 0$, то рівняння називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР)*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Якщо ж $f(x) \neq 0$, то маємо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (ЛНДР)*.

Спочатку розглянемо ЛОДР вищих порядків.

2.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР)

Отже, розглядаємо рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \quad (67)$$

Фундаментальною системою розв'язків ЛОДР (67) називається будь-яка система з n лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ цього рівняння.

Визначником Вронського (вронскіаном) системи функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ називається визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (68)$$

Якщо система функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ лінійно залежна на інтервалі (a, b) , то $W(x) = 0$ для всіх $x \in (a, b)$. Якщо ж хоча б в одній точці $x_0 \in (a, b)$ маємо $W(x_0) \neq 0$, то система функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ лінійно незалежна на (a, b) .

Загальний розв'язок ЛОДР (3) має вигляд

$$y = \sum_{i=1}^n C_i y_i, \quad (69)$$

де $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків цього рівняння; C_i – довільні сталі; $i = 1, 2, \dots, n$.

2.5 Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо ЛОДР n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (70)$$

де a_i – дійсні числа, $i = 1, 2, \dots, n$.

Метод побудови фундаментальної системи розв'язків цього рівняння (*метод Ейлера*) полягає в тому, що частинні розв'язки рівняння (70) шукають у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \quad (71)$$

де λ – стала, що підлягає визначенню.

Підставляння функції (71) та її похідних у диференціальне рівняння (70) приводить до алгебраїчного рівняння

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (72)$$

яке називається *характеристичним* для рівняння (70).

Рівняння (72) отримується з (70) формально заміною похідних $y^{(i)}$ степенями λ^i , $i = 0, 1, \dots, n$ ($y^{(0)} = y$).

Кожному дійсному кореню λ рівняння (72) кратності r відповідає r лінійно незалежних розв'язків рівняння (71)

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{r-1} e^{\lambda x}. \quad (73)$$

Кожній парі комплексно-спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ кратності s відповідає s пар лінійно незалежних розв'язків

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned} \quad (74)$$

Нехай характеристичне рівняння (72) має p дійсних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ кратностей $r_1, r_2, \dots, r_p$ і q пар комплексно-спряжених коренів $\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, \dots, \alpha_q \pm i\beta_q$ кратностей $s_1, s_2, \dots, s_q$ ($r_1 + r_2 + \dots + r_p + 2s_1 + 2s_2 + \dots + 2s_q = n$). Їм відповідає n лінійно незалежних розв'язків, що утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Загальний розв'язок рівняння (70) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} y(x) = P_1(x) e^{\lambda_1 x} + \dots + P_p(x) e^{\lambda_p x} + (Q_1(x) \cos \beta_1 x + R_1(x) \sin \beta_1 x) e^{\alpha_1 x} + \dots + \\ + (Q_q(x) \cos \beta_q x + R_q(x) \sin \beta_q x) e^{\alpha_q x}, \end{aligned} \quad (75)$$

де $P_\nu(x)$ – довільний многочлен степеня $r_\nu - 1$, $\nu = 1, 2, \dots, p$, а $Q_\mu(x)$ і $R_\mu(x)$ – довільні многочлени степеня $s_\mu - 1$, $\mu = 1, 2, \dots, q$.

2.6 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Особливо простий випадок маємо при $n = 2$, тобто для ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду

$$y'' + p y' + q y = 0, \quad (76)$$

де p, q – задані числа.

Характеристичне рівняння в цьому випадку буде квадратним рівнянням

$$\lambda^2 + p \lambda + q = 0. \quad (77)$$

Корені характеристичного рівняння можуть бути такі:

- 1) дійсні та різні, тобто $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
- 2) дійсні та рівні, тобто кратні $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$;
- 3) комплексно-спряжені, тобто $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Відповідно до загальної теорії їм відповідають такі фундаментальні системи розв'язків y_1, y_2 та загальні розв'язки рівняння:

- 1) $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}; y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$
- 2) $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}; y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x};$

3) $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$; $y = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)e^{\alpha x}$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Розглянемо тепер рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (78)$$

в якому $f(x) \neq 0$. Як ми уже знаємо, це ЛНДР n -го порядку.

Структура загального розв'язку ЛНДР (1) визначається формулою

$$y = \tilde{y} + y^*, \quad (79)$$

де $\tilde{y}$ – загальний розв’язок відповідного йому ЛОДР

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

а y^* – який-небудь частинний розв'язок даного ЛНДР.

Метод варіації довільних сталих. Якщо відома фундаментальна система $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ розв'язків відповідного ЛОДР і, отже, загальний розв'язок ЛОДР

$$\tilde{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

то загальний розв'язок ЛНДР (79) можна знайти методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа), згідно з яким

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x), \quad (80)$$

де $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ – деякі функції, похідні яких $C'_1(x), C'_2(x), \dots, C'_n(x)$ визначають з системи рівнянь

[illegible]

яка є системою n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n невідомих $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ Визначником системи є вронскіан фундаментальної системи функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$, який не дорівнює нулю. Тому система має єдиний розв'язок $C'_1 = \varphi_1(x), C'_2 = \varphi_2(x), \dots, C'_n = \varphi_n(x)$. Інтегруючи останні рівності, які є диференціальними рівняннями першого порядку, знаходимо $C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + \tilde{C}_i, i = 1, 2, \dots, n$, де $\tilde{C}_i$ – довільні сталі. Таким чином, загальний розв'язок ЛНДР методом варіації довільних сталих одержуємо у вигляді

$$y = \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x) + \dots + \tilde{C}_n y_n(x) + \sum_{i=1}^n y_i(x) \cdot \int \varphi_i(x) dx. \quad (82)$$

Якщо покласти $\tilde{c}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$, то одержуємо частинний розв'язок ЛНДР

$$y^* = \sum_{i=1}^n y_i(x) \cdot \int \varphi_i(x) dx.$$

2.8 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

Розглянемо ЛНДР n -го порядку зі сталими коефіцієнтами виду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (83)$$

де $a_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ – задані дійсні числа, $f(x) \neq 0$ – задана функція.

Загальний розв'язок такого рівняння, як відомо, визначається формулою

$$y(x) = \tilde{y}(x) + y^*(x), \quad (84)$$

де $\tilde{y}(x)$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР, а $y^*(x)$ – який-небудь частинний розв'язок самого ЛНДР (83). Вище був докладно розглянутий алгоритм побудови загального розв'язку ЛОДР зі сталими коефіцієнтами.

У деяких випадках, коли функція $f(x)$ має спеціальний вигляд, використовують *метод підбору виду частинного розв'язку ЛНДР* за виглядом цієї функції – правої частини рівняння (83). При цьому для визначення самого частинного розв'язку використовують *метод невизначених коефіцієнтів*.

Розглянемо ці випадки:

1. Права частина ЛНДР (83) має вигляд

$$f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x} = (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s)e^{\alpha x}. \quad (85)$$

Якщо α не є коренем характеристичного рівняння відповідного ЛОДР, то частинний розв'язок y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = P_s(x)e^{\alpha x} = (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s)e^{\alpha x}. \quad (86)$$

Тут $P_s(x)$ – многочлен степеня s з невизначеними коефіцієнтами $B_0, B_1, \dots, B_s$.

Якщо α є коренем кратності r характеристичного рівняння, то частинний розв'язок y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = x^r P_s(x)e^{\alpha x} = x^r (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s)e^{\alpha x}. \quad (87)$$

Невідомі числа $B_0, B_1, \dots, B_s$ знаходимо методом невизначених коефіцієнтів, тобто підставивши y^* та $y^{*'}, \dots, y^{*(n)}$ у ЛНДР (83), прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x . Розв'язки отриманої системи рівнянь – числа $B_0, B_1, \dots, B_s$.

2. Права частина ЛНДР (83) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} [Q_{s_1}(x) \cos \beta x + P_{s_2}(x) \sin \beta x], \quad (88)$$

де $Q_{s_1}(x), P_{s_2}(x)$ – многочлени степенів s_1, s_2 відповідно з заданими коефіцієнтами, $\max(s_1, s_2) = s$.

Якщо комплексного числа $\alpha \pm i\beta$ немає серед коренів характеристичного рівняння відповідного ЛОДР, то y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = e^{\alpha x} [u_s(x) \cos \beta x + v_s(x) \sin \beta x], \quad (89)$$

де $u_s(x), v_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами.

Якщо число $\alpha \pm i\beta$ є коренем кратності r характеристичного рівняння, то y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} [u_s(x) \cos \beta x + v_s(x) \sin \beta x], \quad (90)$$

де $u_s(x), v_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами.

Зауважимо, що вигляд розв'язку (89) або (90) зберігається і у випадку, коли у формулі (88) відсутній доданок, що містить $\cos \beta x$ або $\sin \beta x$.

Якщо функція $f(x)$ не підпадає під вигляд наведених функцій, то, якщо це можливо, перетворюють $f(x)$ таким чином, щоб вона була сумою доданків, кожен з яких має спеціальний вид. Далі використовується *принцип суперпозиції розв'язків*.

Розглянемо конкретні приклади, що ілюструють розглянутий метод підбору частинного розв'язку ЛНДР.

2.9 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

При $n = 2$ маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де p, q – задані числа, $f(x) \neq 0$ – задана функція.

Зрозуміло, що це частинний випадок розглянутого вище ЛНДР n -го порядку, який ще простіше проаналізувати. Аналогічно до попереднього розглядаються два спеціальні види функції $f(x)$.

$$\text{I. } f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x} = (A_0x^s + A_1x^{s-1} + \dots + A_s)e^{\alpha x},$$

де $Q_s(x)$ – многочлен степеня s з заданими коефіцієнтами.

1) Якщо α не є коренем характеристичного рівняння відповідного ЛОДР, то частинний розв'язок y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = P_s(x)e^{\alpha x} = (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \dots + B_s)e^{\alpha x},$$

де $P_s(x)$ – многочлен степеня s з невизначеними коефіцієнтами;

2) Якщо α – однократний (простий) корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = xP_s(x)e^{\alpha x} = x(B_0x^s + B_1x^{s-1} + \dots + B_s)e^{\alpha x},$$

де $P_s(x)$ – многочлен степеня s з невизначеними коефіцієнтами;

3) Якщо α – двократний корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = x^2P_s(x)e^{\alpha x} = x^2(B_0x^s + B_1x^{s-1} + \dots + B_s)e^{\alpha x},$$

де $P_s(x)$ – многочлен степеня s з невизначеними коефіцієнтами.

Зауважимо, що число α може бути і нулем, у цьому випадку права частина ЛНДР є многочленом. Всі висновки залишаються слушними.

$$\text{II. } f(x) = e^{\alpha x} [Q_{s_1}(x) \cos \beta x + P_{s_2}(x) \sin \beta x],$$

де $Q_{s_1}(x), P_{s_2}(x)$ – многочлени степенів s_1, s_2 відповідно з заданими коефіцієнтами, $\max(s_1, s_2) = s$.

1) Якщо число $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = e^{\alpha x} [u_s(x) \cos \beta x + v_s(x) \sin \beta x],$$

де $u_s(x), v_s(x)$ – многочлени степеня не вище s з невизначеними коефіцієнтами;

2) Якщо число $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = x e^{\alpha x} [u_s(x) \cos \beta x + v_s(x) \sin \beta x],$$

де $u_s(x)$, $v_s(x)$ – многочлени степеня не вище s з невизначеними коефіцієнтами;

При цьому всі висновки залишаються слушними і у випадках, коли $\alpha = 0$ або у правій частині відсутній доданок, що містить $\cos \beta x$ або $\sin \beta x$.

2.10 Принцип суперпозиції розв’язків

Якщо функції $\tilde{y}_i(x)$ – частинні розв’язки рівнянь

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_i(x), \quad i = \overline{1, k},$$

то функція $\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^k \tilde{y}_i(x)$ є частинним розв’язком рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = \sum_{i=1}^k f_i(x).$$