

Завдання для самостійного розв'язання

15. Розв'язати рівняння:

а) $y'' = x \sin x$; б) $y'' x \ln x = y'$;

в) $y'' + 2y(y')^3 = 0$; г) $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$;

д) $xy'' + y' = \ln x$.

16. Знайти частинний розв'язок рівняння:

а) $y'' = 128y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$;

б) $y'' + \frac{y'}{x} = x$, $y(1) = y'(1) = 1$;

в) $xy'' + y' - x^2 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$;

г) $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

д) $y'' - \frac{y'}{x} = x$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$.

17. Функції $y_1 = \cos^2 x$ та $y_2 = \sin^2 x$ задовольняють деякому однорідному рівнянню 2-го порядку. Переконайтесь, що вони складають фундаментальну систему розв'язків. Скласти рівняння.

18. Рівняння $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$ має розв'язок $y = e^x$. Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

19. Розв'язати рівняння:

а) $y''' - 4y'' + 3y' = 0$; б) $y''' - 3y' + 2y = 0$;

в) $y^{IV} - 49y'' = 0$; г) $y''' + 5y'' + 6y' = 0$;

д) $y^{IV} - 16y = 0$.

20. Знайти частинний розв'язок рівняння:

а) $y'' - 22y' + 121y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

б) $y'' + y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

в) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

г) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

д) $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$.

21. Методом варіації сталих знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x$; б) $y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}$;

$$\text{в)} \quad y'' + 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

22. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$\text{а)} \quad y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$$

$$\text{б)} \quad y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = \frac{1}{2};$$

$$\text{в)} \quad y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 2 \ln 2, \quad y'(0) = 3 \ln 2.$$

23. Розв'язати рівняння:

$$\text{а)} \quad y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}; \quad \text{б)} \quad y'' - 4y' = 8 - 16x;$$

$$\text{в)} \quad y'' - 2y' + y = 4e^x; \quad \text{г)} \quad y'' + y' - 2y = 9 \cos x - 7 \sin x;$$

$$\text{д)} \quad y'' + 2y' + y = (18x + 8)e^{-x}.$$

24. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$\text{а)} \quad y'' - y' = 2(1 - x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$$

$$\text{б)} \quad y'' + y + \sin 2x = 0, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 1;$$

$$\text{в)} \quad y'' + y' = x^2 + 2x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2;$$

$$\text{г)} \quad y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2;$$

$$\text{д)} \quad y'' - 8y' + 16y = e^{4x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

25. Розв'язати рівняння:

$$\text{а)} \quad y'' + 9y = 6 \cos 3x + 39e^{-2x};$$

$$\text{б)} \quad y'' + 4y' + 4y = 12x^2 + 16x + 2 + 4e^{-2x}.$$

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

$$15. \text{ а)} \quad y = -x \sin x - 2 \cos x + C_1 x + C_2;$$

$$\text{б)} \quad y = C_1 x \ln x - C_1 x + C_2; \quad \text{в)} \quad x = \frac{y^3}{3} - C_1 y + C_2;$$

$$\text{г)} \quad y = C_1 \ln |x| + C_2; \quad \text{д)} \quad y = (x + C_1) \ln |x| - 2x + C_2.$$

$$16. \text{ а)} \quad y = \frac{1}{1 - 8x}; \quad \text{б)} \quad y = \frac{1}{9} x^3 + \frac{2}{3} \ln |x| + \frac{8}{9};$$

$$\text{в)} \quad y = \frac{1}{9} x^3 + \frac{2}{3} \ln |x| + \frac{8}{9}; \quad \text{г)} \quad y = -\ln |1 - x|;$$

$$\text{д)} \quad y = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{13}{6}.$$

$$17. \quad y'' \cdot \sin 2x - 2y' \cdot \cos 2x = 0.$$

18. $y = -x^2 - e^{x-1}$.

19. а) $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^x$;

б) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x}$;

в) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{7x} + C_4 e^{-7x}$;

г) $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$;

д) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

20. а) $y = e^{11x}(1-11x)$; б) $y = \sin x$; в) $y = -e^x + 2e^{2x}$;

г) $y = e^x \cos x$; д) $y = 9 - 2e^{-4x}$.

21. а) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2 \sin 2x \ln |tg x|$;

б) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - 3x \cos 3x + \sin 3x \cdot \ln |\sin 3x|$;

в) $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x e^{-x} (\ln x - 1)$.

22. а) $y = \cos 3x(1 - \ln |\cos 3x|) + 3x \sin 3x$;

б) $y = \sin \frac{x}{2} \left(2 + \ln \left| tg \frac{x}{4} \right| \right)$;

в) $y = e^x \ln |1 + e^{-x}| - x e^{2x} + e^{2x} \ln |1 + e^x|$.

23. а) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x} + 3x e^{4x}$;

б) $y = C_1 + C_2 e^{4x} + 2x^2 - x$;

в) $y = (C_1 + C_2 x + 2x^2) e^x$;

г) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 2 \cos x + 3 \sin x$;

д) $y = (C_1 + C_2 x + 3x^3 + 4x^2) e^{-x}$.

24. а) $y = e^x + x^2$; б) $y = \frac{1}{3} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin x - \cos x$;

в) $y = 2 + 2e^{-x} + \frac{1}{3} x^3$; г) $y = (2x + 2) e^{-3x} + 2e^{3x}$;

д) $y = \left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) e^{4x}$.

25. а) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x \sin 3x + 3e^{-2x}$;

б) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + 2x^2 e^{-2x} + 3x^2 - 2x + 1$.