

матрицю якої позначимо через A .

Система повинна мати ненульовий розв'язок. Отже, її визначник дорівнює нулю, що приводить до рівняння n -го порядку для визначення λ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Останнє рівняння є характеристичним рівнянням матриці A і його ж надалі ми будемо називати *характеристичним рівнянням системи диференціальних рівнянь*. Припустимо, що це характеристичне рівняння має n різних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, які є власними числами матриці A . Із лінійної алгебри відомо, що кожному власному числу λ_k відповідає власний вектор $\vec{p}_k = (p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{nk})$, $k = 1, 2, \dots, n$. Така система n власних векторів $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ є лінійно незалежною і її можна прийняти за базис. Матрицю P переходу до нового базису одержимо, записуючи координати кожного власного вектора

$$\vec{p}_k = (p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{nk}), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{у відповідний стовпець, тобто} \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що кожному значенню λ_k відповідає функція виду $\bar{x}_k = C_k e^{\lambda_k t}$, $k = 1, 2, \dots, n$, де C_k – довільні сталі, одержимо фундаментальну систему розв'язків $e^{\lambda_k t}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь легко записати у матричному вигляді $X = P\bar{X}$, де $\bar{X}$ – матриця-стовпець,

$$\text{елементами якої є функції } \bar{x}_k = C_k e^{\lambda_k t}, \text{ тобто} \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \dots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у матричному записі буде наступним

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \dots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad \text{звідки}$$

$$\begin{cases} x_1 = C_1 p_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{12} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n p_{1n} e^{\lambda_n t}, \\ x_2 = C_1 p_{21} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{22} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n p_{2n} e^{\lambda_n t}, \\ \dots \\ x_n = C_1 p_{n1} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{n2} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n p_{nn} e^{\lambda_n t}. \end{cases}$$