

Приклади розв'язування задач

33. Розв'язати методом виключення систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y. \end{cases}$$

► а) Маємо лінійну однорідну систему. Диференціюючи по t перше рівняння, одержимо $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$. Підставимо в одержану рівність з другого рівняння системи $\frac{dy}{dt} = 4x + 3y$, потім з першого рівняння $y = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt} - x\right)$. Таким чином, ми вилучили з рівняння $\frac{dy}{dt}$ і y та одержали $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2\left(4x + \frac{3}{2}\left(\frac{dx}{dt} - x\right)\right)$. Після перетворень отримуємо ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно невідомої функції $x(t)$ $x'' - 4x' - 5x = 0$. Розв'язуємо його стандартним методом. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ має різні дійсні корені $\lambda_1 = -1$ і $\lambda_2 = 5$, отже, загальним розв'язком буде $x = C_1e^{-t} + C_2e^{5t}$. Далі знаходимо $x' = -C_1e^{-t} + 5C_2e^{5t}$ для того, щоб підставити x і x' у вираз для визначення функції $y(t)$. Маємо

$$y = \frac{1}{2}(-C_1e^{-t} + 5C_2e^{5t} - C_1e^{-t} - C_2e^{5t}), \text{ або } y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{5t}.$$

Загальним розв'язком даної системи буде

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{5t}; \\ y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{5t}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

► б) Розв'яжемо цю лінійну неоднорідну систему методом виключення.

Диференціюємо по t перше рівняння $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - \sin t$, підставимо в одержану рівність з другого рівняння системи

$$\frac{dy}{dt} = -2x - y = -2x - \left(\frac{dx}{dt} - x - \cos t\right) = -\frac{dx}{dt} - x + \cos t.$$

Одержали

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt} - x + \cos t - \sin t, \text{ або } \frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos t - \sin t, \text{ тобто ЛНДР другого порядку зі}$$

сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Характеристичне рівняння для відповідного ЛОДР $\lambda^2 + 1 = 0$ має комплексно спряжені корені $\lambda_{1,2} = \pm i$,

отже, загальним розв'язком ЛОДР буде $\bar{x} = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, а частинний розв'язок ЛНДР слід шукати у вигляді $x^* = t(A \cos t + B \sin t)$. Тоді

$$\begin{aligned}\frac{dx^*}{dt} &= A \cos t + B \sin t + t(-A \sin t + B \cos t), \\ \frac{d^2 x^*}{dt^2} &= -A \sin t + B \cos t - A \sin t + B \cos t + t(-A \cos t - B \sin t).\end{aligned}$$

Підстановка цих виразів у ліву частину ЛНДР приводить до рівності $-2A \cos t + 2B \sin t = \cos t - \sin t$, звідки $A = B = \frac{1}{2}$.

Враховуючи, що $x = \bar{x} + x^*$, записуємо

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{t}{2}(\cos t + \sin t).$$

Пропонуємо читачам самостійно виконати викладки для одержання другої невідомої функції $y(t)$, а ми лише наведемо остаточний результат

$$y = \left(C_2 - C_1 - \frac{1}{2}\right) \cos t + \left(-C_1 - C_2 - t + \frac{1}{2}\right) \sin t.$$

Загальним розв'язком даної системи буде

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{t}{2}(\cos t + \sin t), \\ y = \left(C_2 - C_1 - \frac{1}{2}\right) \cos t + \left(-C_1 - C_2 - t + \frac{1}{2}\right) \sin t. \end{cases} \blacktriangleleft$$

34. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 4y; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - 12y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y - z, \\ \frac{dz}{dt} = -4x + 12y + 3z. \end{cases}.$$

► а) Тут ми маємо лінійну однорідну систему зі сталими коефіцієнтами. Правій частині відповідає матриця $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Знайдемо власні числа матриці A , розв'язавши

характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 7 - \lambda & 3 \\ 6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, тобто $\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0$. Знайдемо корені цього

рівняння $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$ і запишемо матрицю $\bar{X} = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{10t} \end{pmatrix}$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Знайдемо тепер власні вектори матриці A .

При $\lambda_1 = 1$ система рівнянь для визначення власного вектора має вигляд

$$\begin{cases} (7-1)p_1 + 3p_2 = 0, \\ 6p_1 + (4-1)p_2 = 0. \end{cases}$$

Ця система зводиться до одного рівняння $2p_{11} + p_{21} = 0$. Нам потрібно знайти який-небудь ненульовий розв'язок, наприклад, можемо покласти $p_{11} = 1$ і обчислити $p_{21} = -2p_{11} = -2$. Маємо перший власний вектор $\vec{p}_1 = (1; -2)$.

При $\lambda_2 = 10$ система рівнянь для визначення власного вектора має вигляд

$$\begin{cases} (7-10)p_{12} + 3p_{22} = 0, \\ 6p_{12} + (4-10)p_{22} = 0. \end{cases}$$

Ця система зводиться до одного рівняння $p_{12} - p_{22} = 0$ або $p_{12} = p_{22}$. Один з ненульових розв'язків $p_{12} = 1, p_{22} = 1$ визначає другий власний вектор $\vec{p}_2 = (1; 1)$

Запишемо координати власних векторів у відповідні стовпці матриці $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ще раз зауважимо, що координати першого власного вектора записані у перший стовпець, а координати другого власного вектора – у другий стовпець.

Побудуємо тепер загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у матричному записі: $X = P\bar{X}$, де матриця $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, а матриці P і $\bar{X}$ ми уже записали

вище. Тоді $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{10t} \end{pmatrix}$. Виконаємо множення матриць і одержимо шуканий

загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{10t}, \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{10t}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

► 6) Тут правій частині відповідає матриця

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -12 & -1 \\ 1 & -3-\lambda & -1 \\ -4 & 12 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ звідки}$$

$$(\lambda - 6)(\lambda^2 - 9) - 48 - 12 + 12 + 4\lambda + 72 - 12\lambda + 36 - 12\lambda = 0,$$

або $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$. Оскільки сума всіх коефіцієнтів цього кубічного рівняння дорівнює нулю, робимо висновок, що один з коренів $\lambda_1 = 1$. Виконаємо ділення многочлена $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ на $\lambda - 1$ (щоб знайти решту коренів характеристичного рівняння)

$$\begin{array}{r} \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \overline{) \lambda - 1} \\ \underline{\lambda^3 - \lambda^2} \\ -5\lambda^2 + 11\lambda \\ \underline{-5\lambda^2 + 5\lambda} \\ 6\lambda - 6 \\ \underline{6\lambda - 6} \\ 0 \end{array}$$

Розв'язавши квадратне рівняння $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, знайдемо

корені $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Власні числа матриці A «породжують» лінійно незалежну систему

функцій e^t , e^{2t} , e^{3t} , тому можна записати матрицю $\bar{X} = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix}$, де C_1, C_2, C_3 –

довільні сталі.

Знайдемо тепер власні вектори матриці A .

При $\lambda_1 = 1$ система рівнянь для визначення власного вектора має вигляд

$$\begin{cases} 5p_{11} - 12p_{21} - p_{31} = 0, \\ p_{11} - 4p_{21} - p_{31} = 0, \\ -4p_{11} + 12p_{21} + 2p_{31} = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник цієї лінійної однорідної системи дорівнює нулю, досить розглянути які-небудь два лінійно незалежні рівняння, наприклад, два перші

$$\begin{cases} 5p_{11} - 12p_{21} - p_{31} = 0, \\ p_{11} - 4p_{21} - p_{31} = 0. \end{cases}$$

Нам потрібно знайти який-небудь ненульовий розв'язок, наприклад, можемо покласти $p_{21} = 1$ і розв'язати систему

$$\begin{cases} 5p_{11} - p_{31} = 12, \\ p_{11} - p_{31} = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{11} = 2, \\ p_{31} = -2. \end{cases}$$

Маємо перший власний вектор $\vec{p}_1 = (2; 1; -2)$.

При $\lambda_2 = 2$ розв'язуємо систему
$$\begin{cases} 4p_{12} - 12p_{22} - p_{32} = 0, \\ p_{12} - 5p_{22} - p_{32} = 0, \\ -4p_{12} + 12p_{22} + p_{32} = 0. \end{cases}$$

Тут знову досить розглянути два перші рівняння (третє є їх наслідком), де покласти, наприклад, $p_{22} = 1$. Тоді

$$\begin{cases} 4p_{12} - p_{32} = 12, \\ p_{12} - p_{32} = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{12} = 7/3, \\ p_{32} = -8/3. \end{cases}$$

Отримали власний вектор $\vec{p} = (7/3; 1; -8/3)$. Для зручності домножимо цей вектор на 3 і одержимо $\vec{p}_2 = (7; 3; -8)$.

Аналогічно при $\lambda_3 = 3$ розв'язуємо систему

$$\begin{cases} 3p_{13} - 12p_{23} - p_{33} = 0, \\ p_{13} - 6p_{23} - p_{33} = 0, \\ -4p_{13} + 12p_{23} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{13} = 3, \\ p_{23} = 1, \\ p_{33} = -3. \end{cases}$$

Отже, $\vec{p}_3 = (3; 1; -3)$.

Запишемо координати власних векторів у відповідні стовпці матриці

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix}. \text{ Побудуємо тепер загальний розв'язок системи диференціальних}$$

рівнянь у матричному записі $X = P\bar{X}$, де $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\text{Тоді } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Отже, шуканий загальний розв'язок матиме вигляд

$$\begin{cases} x = 2C_1 e^t + 7C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}, \\ y = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ z = -2C_1 e^t - 8C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

35. Знайти частинний розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, & x(0) = -1, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y, & y(0) = 4. \end{cases}$$

► Правій частині системи відповідає матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Характеристичне

рівняння $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, тобто $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$, має корені $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, тому матриця

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{5t} \end{pmatrix}, \text{ де } C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Знайдемо тепер власні вектори матриці A .

При $\lambda_1 = -1$ система рівнянь для визначення власного вектора має вигляд

$$\begin{cases} 2p_{11} + 2p_{21} = 0, \\ 4p_{11} + 4p_{21} = 0, \end{cases} \Rightarrow p_{21} = -p_{11}. \text{ Перший власний вектор } \vec{p}_1 = (1; -1).$$

При $\lambda_2 = 5$ система рівнянь для визначення власного вектора має вигляд

$$\begin{cases} -4p_{12} + 2p_{22} = 0, \\ 4p_{12} - 2p_{22} = 0, \end{cases} \Rightarrow p_{22} = 2p_{12}. \text{ Другий власний вектор } \vec{p}_2 = (1; 2).$$

Запишемо координати власних векторів у відповідні стовпці матриці $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Побудуємо тепер загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у матричному записі $X = P\bar{X}$, тобто

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Одержимо загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

З початкових умов визначаємо сталі C_1, C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ -C_1 + 2C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x = -2e^{-t} + e^{5t}, \\ y = 2e^{-t} + 2e^{5t}. \end{cases} \blacktriangleleft$$