3.3 Визначений інтеграл

3.3.1 Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Означення. *Криволінійною трапецією* називається плоска фігура, що обмежена лініями: $y = f(x) \geq 0,\ y = 0,\ x = a,\ x = b.$

На рис. 3.2. зображені: класична криволінійна трапеція (*а*) та її вироджені випадки (*б*) та (*в*).

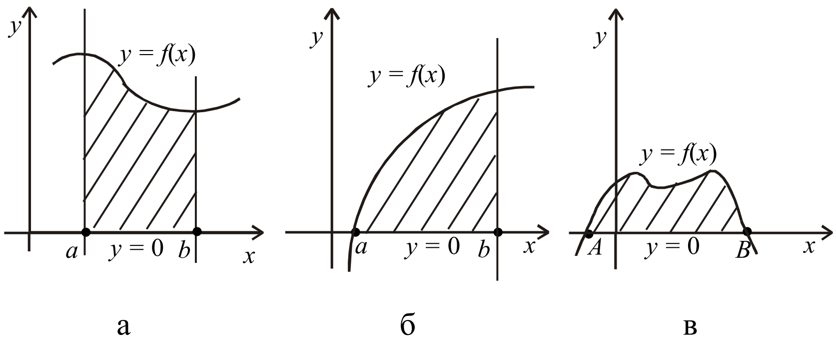


Рис. 3.2

Задача. Обчислити площу криволінійної трапеції *aABв* (рис. 3.2).

Розв'язання. Розіб'ємо проміжок $[a; b]$ на n частин точками $x_i,\ i = \left(\overline{0,\ n}\right)$ так що $a = x_0,\ b = x_n$.

Виберемо точки ξ_i так: $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

Побудуємо прямокутники з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $f\left(\xi_i\right)$ (рис. 3.3).

Площа елементарного прямокутника $\Delta S_i = f\left(\xi_i\right) \cdot \Delta x_i$. Площа ступінчастої фігури $\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \cdot \Delta x_i = S_n$ буде тим менше відрізнятись від площі криволінійної трапеції S_{aABb}, чим менша довжина $\max \Delta x_i$, а в граничному випадку ці площі будуть збігатися, тобто $S_{aBAb} = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\xi_i \cdot \Delta x_i$.

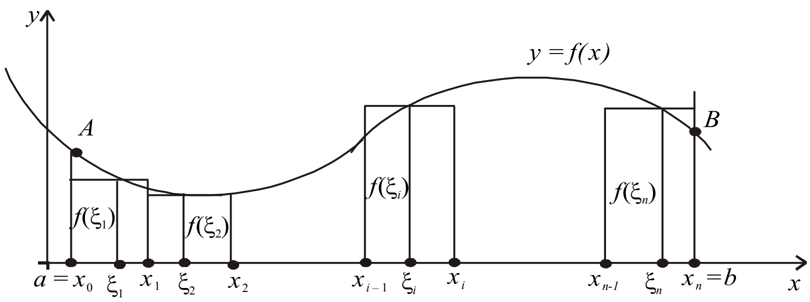


Рис. 3.3

Задача. Обчислити роботу змінної сили $\vec{F} = \vec{e} \cdot f(x),\ \left|\vec{e}\right| = 1$, що виконується при переміщенні матеріальної точки на проміжку $x \in [a;\ b]$ (рис. 3.4).

Розв'язання.

Розіб’ємо проміжок $[a;b]$ на n частин точками x_i, $i=\left(\overline{0,n}\right)$. На кожному з відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ вважатимемо, що сила стала і дорівнює $f(\xi_i)$, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ (рис. 3.4).

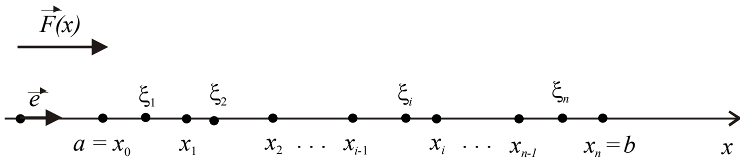


Рис. 3.4

Елементарна робота сили на відрізку Δx_i буде $\Delta A_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Робота A сили $\vec{F}$ на відрізку $[a;b]$ знайдеться тоді так:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i .$$

Означення. Сума типу $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ називається *інтегральною сумою*.

Оперувати поняттям інтегральної суми доводиться у процесі розв’язку різних задач. Взагалі інтегральна сума може залежати від способу розбиття проміжку $[a;b]$ на частини Δx_i, а також від вибору на них точок ξ_i.

3.3.2 Поняття визначеного інтеграла

Нехай $y = f(x)$ — деяка функція, що задана на проміжку $[a;b]$ (рис. 3.3). Розіб’ємо $[a;b]$ на n частин точками x_i, так що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{i-1} < x_i <\ldots< x_{n-1} < x_n = b.$$

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $i = \left(\overline{1,n}\right)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Складемо інтегральну суму $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda \to 0$ і не залежить ні від способу розбиття $[a;b]$ на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *на проміжку* $[a;b]$ і позначається:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx , \qquad (3.8)$$

де $\int\limits_a^b$ — знак визначеного інтеграла;

a, b — нижня та верхня межі інтегрування;

$f(x)$ — підінтегральна функція;

$f(x)\,dx$ — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

За означенням, визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ — число, яке залежить від типу функції $f(x)$ та проміжку $[a;b]$; він не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Означення. Функція, для якої на $[a; b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *інтегровною на цьому проміжку*.

Далі буде показано, що неперервні функції — інтегровні.

Геометричний зміст визначеного інтеграла: якщо $f(x) \geq 0,\ x \in [a;\ b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції (рис. 3.2), тобто

$$S = \int_a^b f(x)dx\ .$$

3.3.3 Властивості визначеного інтеграла

I. Якщо $f(x) = c = \text{const}$, то $\int_a^b cdx = c \cdot (b-a)$.

II. Сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

III. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на $[a; b]$, то $\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$

IV. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

V. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

VI. Якщо $f(x)$ — інтегровна в будь-якому із проміжків: $[a; b]$, $[a; c]$, $[c; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

VII. Якщо $f(x) \geq 0$ і інтегровна для $x \in [a,\ b],\ \ b > a,$ то $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

VIII. Якщо $f(x)$, $g(x)$ — інтегровні та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a,\ b],\ \ b > a,$ то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

IX. Якщо $f(x)$ — інтегровна та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a,\ b],\ \ b > a,$ то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

X. ***Теорема 7*** **(*про середнє*)**: якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a,\ b],\ \ b > a,$ то знайдеться така точка $x = c \in [a,\ b],$ що:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a) \tag{3.9}$$

Геометричний зміст теореми про середнє полягає в тому, що існує прямокутник із сторонами $f(c), c\in[a,\ b]$ та $b-a$, який рівновеликий криволінійній трапеції *aABв* за умови, що функція $f(x)\ge 0$ та неперервна на проміжку $[a; b]$ (рис. 3.5).

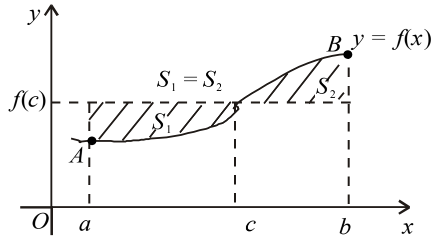


Рис. 3.5.

3.3.4 Поняття визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування, формула Ньютона—Лейбніца

Розглянемо інтеграл $\Phi(x)=\int_a^x f(x)dt$, який буде функцією від верхньої межі інтегрування. Змінній *x* надамо приросту Δx, що зумовить приріст функції.

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x)-\Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

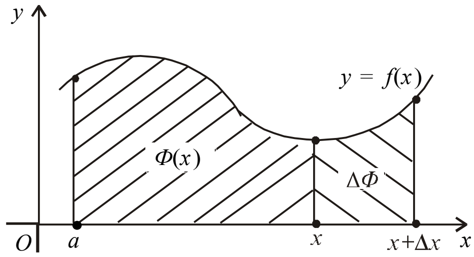


Рис. 3.6

Теорема 8. Якщо функція $f(x)$ неперервна для будь-якого $x\in[a;\ b],$ то похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування по цій межі дорівнює підінтегральній функції від верхньої межі інтегрування, тобто

$$\Phi'_x(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x). \tag{3.10}$$

Наслідки:

1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею від функції $f(x)$ є одна із первісних для $f(x)$.

2. Будь-яка неперервна функція на проміжку $[a;\ b]$ має на цьому проміжку первісну, яку, наприклад, завжди можна побудувати у вигляді визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею, тобто

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{\sin x}{x}dx, x \in [1;+\infty)$.

Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ — неперервна на проміжку $[1;+\infty)$, тому $\int \frac{\sin x}{x}dx = \int_1^x \frac{\sin t}{t}dt + C, \forall x \in [1;+\infty)$.

Теорема 9. **(Ньютона—Лейбніца).** Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a;\, b]$, то визначений інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a;\, b]$ дорівнює приросту первісної функції $f(x)$ на цьому проміжку, тобто

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \text{ де } F'(x) = f(x). \qquad (3.11)$$

Позначимо дію подвійної підстановки так: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, тоді зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами можна подати такою рівністю:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = (F(x) + C)\Big|_a^b = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b \qquad (3.12)$$

Наслідок. Для обчислення визначеного інтеграла достатньо знайти одну із первісних підінтегральних функцій і виконати над нею подвійну підстановку.

3.3.5 Метод підстановки у визначеному інтегралі

Теорема 10. Якщо: 1) $f(x)$ — неперервна для $x \in [a;\, b]$; 2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; 3) $x = \varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ — неперервні для $t \in [\alpha;\, \beta]$; 4) при $t \in [\alpha;\, \beta] \Rightarrow x \in [a;\, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \qquad (3.13)$$

Зауваження. При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

3.3.6 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема 11. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні для $x \in [a;\, b]$, то

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (3.14)$$

3.3.7 Деякі застосування визначеного інтеграла

Розглянемо застосування визначеного інтеграла до розв'язання деяких геометричних і фізичних задач.

Обчислення площ плоских фігур.

I. Фігура обмежена лініями $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ (рис. 3.7). Функція $f(x)$ — неперервна та $f(x) \geq 0$. Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така:

$$S = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{3.15}$$

Якщо при виконанні всіх інших умов $f(x) \leq 0$ (рис. 3.8),

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|. \tag{3.16}$$

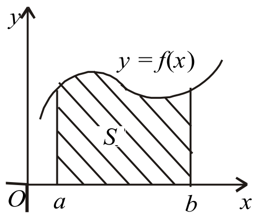


Рис. 3.7

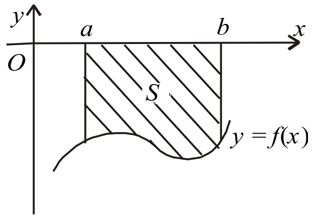


Рис. 3.8

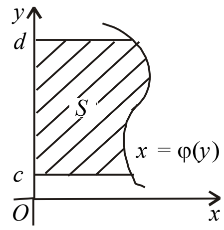


Рис. 3.9

II. Фігура обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (рис. 3.9). Функція $x = \varphi(y)$ — неперервна та $\varphi(y) \geq 0$. Площа S такої фігури буде

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy, \tag{3.17}$$

а якщо $\varphi(y) \leq 0$ (рис. 3.10), то

$$S = \left| \int_c^d \varphi(y)\, dy \right|. \tag{3.18}$$

III. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$. Функції $f(x)$ та $g(x)$ — неперервні та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a;\, b]$ (рис. 3.11). Площа S такої фігури визначається як різниця площ фігур aA_2B_1b та aA_2B_1b

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx. \tag{3.19}$$

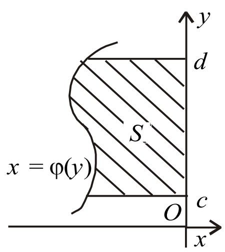


Рис. 3.10

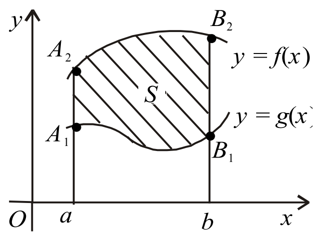


Рис. 3.11

IV. Розглянемо випадок, коли криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \end{cases}$$

де $x(t),\ y(t)$ – неперервні функції, які мають на відрізку $[t_1;t_2]$ неперервні похідні $x'(t),\ y'(t)$. Тоді якщо $x(t)$ на відрізку $[t_1;t_2]$ є монотонною, причому $x(t_1)=a,\ x(t_2)=b$, то для обчислення площі криволінійної трапеції досить в інтегралі (3.15) зробити заміну змінної $x(t),\ dx=x'(t)dt$. Дістанемо формулу

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)dt\,. \tag{3.20}$$

V. Розглянемо плоску фігуру, обмежену кривою, заданою в полярній системі координат неперервною функцією $\rho=r(\varphi)$ і променями $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ (рис. 3.12). Таку фігуру називають *криволінійним сектором.* Площа криволінійного сектора обчислюється за формулою

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi\,. \tag{3.21}$$

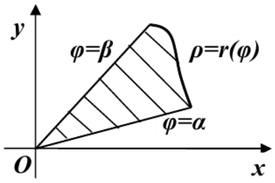


Рис. 3.12

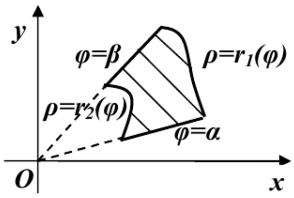


Рис. 3.13

VI. Якщо сектор обмежено лініями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, $\rho=r_1(\varphi)$, $\rho=r_2(\varphi)$ (рис. 3.13), то площа S такої фігури визначається як різниця площ фігур S_1 та S_2, тобто

$$S=S_1-S_2=\int_{\alpha}^{\beta}\left(r_1^2(\varphi)-r_2^2(\varphi)\right)d\varphi\,. \tag{3.22}$$

Довжина дуги.

Рівняння, що задає лінію	Формула для обчислення довжини дуги
$y=f(x),\quad a\le x\le b$	$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$
$x=g(y),\quad c\le y\le d$	$l=\int_c^d\sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\,dy$
$\begin{cases}x=x(t);\\ y=y(t),\quad t_1\le t\le t_2,\end{cases}$	$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$
$\rho=r(\varphi),\quad \alpha\le\varphi\le\beta$	$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2+\left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$

Обчислення об’єму тіла.

Задача. Знаючи закон зміни площі поперечного перерізу тіла, знайти його об’єм.

Розв’язання. Нехай функція $S=S(x)$ — площа поперечного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі *Ox* у деякій точці $x\in[a;\ b]$. Відрізок $[a;\ b]$ дає лінійний розмір тіла в напрямі осі *Ox*.

Поділимо проміжок $[a;b]$ на n частин точками x_i, $i=(\overline{0,n})$ так, що $a=x_0$, $b=x_n$. Через ці точки проведемо площини перпендикулярно до осі, у результаті чого тіло буде розбито на n частин. Кожну з цих частин наближено замінимо циліндром з висотою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ та площею основи $S(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ (рис. 3.14).

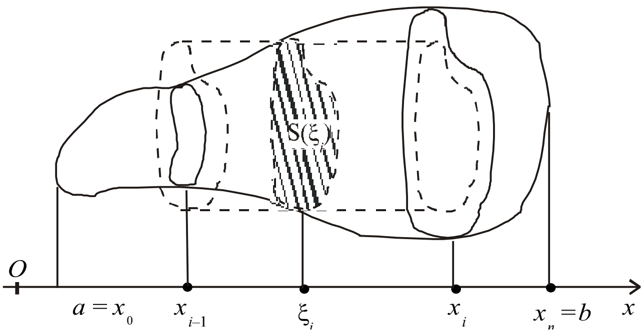


Рис. 3.14

Тоді об'єм тіла наближено дорівнюватиме інтегральній сумі $V \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$, а точне значення об'єму тіла подаватиметься границею

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx, \qquad (3.23)$$

якщо ця границя існує за (3.8).

Задача. Знайти об'єм тіла V_x, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=f(x)\ge 0, y=0, x=a, x=b$ (рис. 3.15).

Розглядаючи цю задачу, як частинний випадок попередньої задачі, встановлюємо, що площа поперечного перерізу $S(x)$ в даному випадку є площа круга радіусом $y=f(x)$, тобто $S(x)=\pi\cdot(f(x))^2$, а об'єм тіла обертання за формулою (3.23) буде таким:

$$V_x = \int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx \qquad (3.24)$$

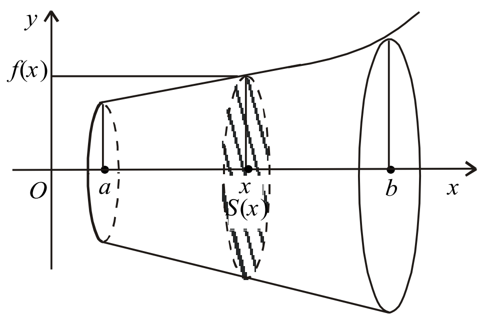


Рис. 3.15

Зауваження. Аналогічно, об'єм тіла V_y, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $x=0, x=\varphi(x), y=c, y=d$ (див. рис. 3.9), матиме вигляд

$$V_y = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2 dy. \qquad (3.25)$$

Площа поверхні обертання.

Якщо функція $y = f(x)$ у кожній внутрішній точці відрізка $[a;\, b]$ має неперервну похідну $f'(x)$, то площу поверхні, яка утворюється при обертанні графіка функції $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ навколо осі Ox, визначається за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx. \qquad (3.26)$$

Застосування інтеграла у фізиці.

За допомогою визначеного інтеграла обчислюють статичні моменти і моменти інерції плоских дуг та фігур, їх координати центра тяжіння, роботу і тиск, шлях, пройдений тілом при заданій швидкості та інше. При цьому використовують загальну схему побудови визначеного інтеграла і фізичний закон, який описує течію розглядуваного процесу. Наприклад, робота змінної сили $F = f(x)$, діючої в напрямку осі Ox на відрізку $[a;\, b]$, визначається за формулою $A = \int\limits_a^b f(x)dx$; шлях, пройдений тілом за відрізок часу $[t_1;\, t_2]$ при заданій швидкості $\upsilon = \upsilon(t)$, буде дорівнювати $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt$, якщо $\rho(l)$ – густина стержня, то маса неоднорідного стержня визначається за формулою $m = \int\limits_a^b \rho(l)dl$.

Зразки розв'язування вправ

Приклад 3.35. Обчислити $\int\limits_1^2 5x^2 dx$.

Розв'язання.

$$\int_1^2 5x^2 dx = 5\int_1^2 x^2 dx = 5\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = 5\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = 5\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = 5 \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{3}.$$

Коментар. Знаходимо одну з первісних функцій і скористаємось формулою Ньютона-Лейбніца.

Приклад 3.36. Обчислити $\int\limits_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx = \int_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 d\left(e^x - 1\right) = \frac{1}{5}\left(e^x - 1\right)^5\Bigg|_0^{\ln 2} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\left(e^{\ln 2} - 1\right)^5 - \left(e^0 - 1\right)^5\right) = \frac{1}{5}\left((2-1)^5 - (1-1)^5\right) = \frac{1}{5}.$$

Коментар. Знаходимо первісну для підінтегральної функції методом введення функції під знак диференціала. За формулою Ньютона-Лейбніца від значення первісної у верхній межі віднімаємо значення первісної у нижній.

Приклад 3.37. Обчислити $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.

Розв'язання.

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \frac{1}{3}\int_0^4 (3x+4)^{-\frac{1}{2}} d(3x+4) = \frac{1}{3}\frac{(3x+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3\cdot 4+4} - \sqrt{3\cdot 0+4}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{16} - \sqrt{4}\right) = \frac{2}{3}(4-2) = \frac{4}{3}.$$

Коментар. Знаходимо первісну для підінтегральної функції методом введення функції під знак диференціала. За формулою Ньютона-Лейбніца від значення первісної у верхній межі віднімаємо значення первісної у нижній.

Приклад 3.38. Обчислити $\int_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

Розв'язання.

$$\int_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int_2^5 \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \int_2^5 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3^2} = \frac{1}{3} arctg\frac{x+1}{3}\Bigg|_2^5 = \frac{1}{3} arctg 2 - \frac{1}{3} arctg 1 =$$

$$= \frac{1}{3} arctg 2 - \frac{\pi}{12}.$$

Коментар. Виділяємо повний квадрат у знаменнику дробу.

Приклад 3.39. Обчислити $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Розв'язання.

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} x = t^2, \quad dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}dt =$$

$$= 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left(t - \ln|t+1|\right)\Big|_2^3 = 2\left(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)\right) = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right).$$

Коментар. Обчислюючи визначений інтеграл заміною змінних, на відміну від невизначеного інтегрування, не потрібно вертатись до старої змінної. Не забуваємо змінити межі визначеного інтеграла.

Приклад 3.40. Обчислити $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \left| \begin{array}{cc} 1+\sqrt{2x+1} = t, & dx = (t-1)dt; \\ x = \frac{(t-1)^2}{2}, & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline t & 2 & 4 \end{array} \end{array} \right| = \int_2^4 \frac{t-1}{t}dt = \int_2^4 \left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = \left(t - \ln|t|\right)\Big|_2^4 =$$

$$= 4 - \ln 4 - (2 - \ln 2) = 2 - \ln 2.$$

Приклад 3.41. Обчислити $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t, \\ dx = 3\cos t\,dt \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9\cos^2 t} = 3\cos t \\ \qquad\qquad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \end{array} \right| = 81\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{81}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cdot\sin t\cdot\cos t)^2\,dt = \frac{81}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = \frac{81}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt = \frac{81}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{81}{8}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \frac{81}{8}\left(0 - \frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{81}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{81\pi}{16}.$$

Коментар. Використовуємо тригонометричну підстановку і не забуваємо змінити межі визначеного інтеграла:

$$x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\sin t = 0; \quad t = 0.$$

$$x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3\sin t = 3; \quad \sin t = 1; \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 3.42. Обчислити $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Коментар. Обчислимо визначений інтеграл методом інтегрування частинами.

Приклад 3.43. Обчислити $\int\limits_1^e x\ln x d x$.

Розв'язання.

$$\int\limits_1^e x\ln x d x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x}; \\ dv = xdx, & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e \frac{x^2\cdot dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^e - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^e = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\Bigg|_1^e = \frac{e^2}{2}\left(\ln e - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

Приклад 3.44. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=-x^2+4x+5$ та $y=2x-3$.

Розв'язання.

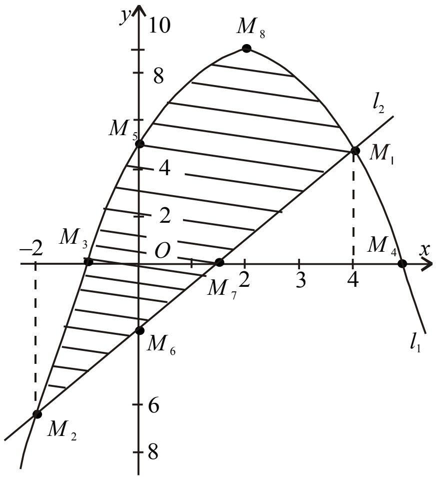


Рис. 3.16

Побудуємо фігуру, обмежену параболою $y=-x^2+4x+5$ (l_1) та прямою $y=2x-3$ (l_2) на координатній площині; при цьому знаходимо точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат, а також координати вершини параболи (рис. 3.16).

$$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(4;\ 5) \\ M_2(-2;\ -7). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x^2-4x-5=0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_4(5;\ 0) \\ M_3(-1;\ 0). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ x=0 \end{cases} \begin{cases} y=5 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(0;\ 5).$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M_7(1{,}5;\ 0).$$

$$l_2 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow M_6(0;\ -3).$$

Точка $M_8(2;\ 9)$ — вершина параболи $y-9=-(x-2)^2$.

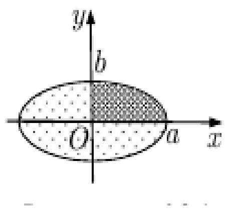
Площа S фігури $M_1M_8M_2$ за формулою (3.19) буде така:

$$S=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+4x+5-(2x-3)\right)dx=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)dx=\left.\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right)\right|_{-2}^{4}=-\frac{64}{3}+16+32-$$

$$-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)=36\ (кв.\ од.).$$

Приклад 3.45. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$.

Розв'язання.



Площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданою параметрично знаходять за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t)\, dt .$$

Враховуючи симетрію фігури, одержимо:

$$S = 4S_1 = 4\int_0^a y(x)dx = \left| \begin{array}{c} y = b\sin t \\ x = a\cos t \\ dx = -a\sin t\, dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & a \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array} \end{array} \right| = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot (-a\sin t)dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\, dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi \right) -$$

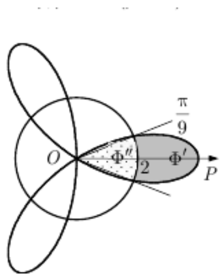
$$-2ab(0-\sin 0) = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab(кв.\ од.)$$

Приклад 3.46. Знайти площу фігури, обмеженої кривими: $\rho = 4\cos 3\varphi, \quad \rho = 2\ (\rho \ge 2)$.

Розв'язання.

Площу фігури, обмеженої трипелюстковою розою та колом знаходимо, враховуючи симетрію:

$$S = 3S_{\Phi'} .$$



Знайдемо за якого значення кута (для розглядуваної пелюстки), перетинаються коло і роза:

$$\begin{cases} \rho = 2, \\ \rho = 4\cos 3\varphi, \end{cases} \Leftrightarrow \quad 4\cos 3\varphi = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 3\varphi = \frac{1}{2}.$$

$$3\varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z \quad \Rightarrow \quad \varphi_{1,2} = \pm\frac{\pi}{9}.$$

$$S_{\Phi'} = S_{\Phi} - S_{\Phi''},$$

де S_{Φ} – площа ''розового'' сектора $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$, $S_{\Phi''}$ – площа кругового сектора. Для обчислення відповідних площ використаємо формулу (3.21).

$$S_{\Phi} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} 16\cos^2 3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 16\int_0^{\frac{\pi}{9}} \frac{1+\cos 6\varphi}{2} d\varphi = 8\int_0^{\frac{\pi}{9}} (1+\cos 6\varphi)d\varphi = 8\left(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{9}} =$$

$$= 8\left(\frac{\pi}{9} + \frac{1}{6}\sin\frac{6\pi}{9} \right) - 8\left(0 + \frac{1}{6}\sin 0 \right) = 8\left(\frac{\pi}{9} + \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{8\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$S_{\Phi} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} 4\, d\varphi = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{9}} d\varphi = 4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{9}} = 4\cdot\frac{\pi}{9} - 0 = \frac{4\pi}{9}.$$

$$S_{\Phi'} = S_{\Phi} - S_{\Phi''} = \frac{8\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4\pi}{9} = \frac{4\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$S = 3S_{\Phi'} = 3\cdot\left(\frac{4\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}(кв.од.)$$

Приклад 3.47. Обчислити довжину лінії $x^2 + y^2 = 9$, що розміщується в першій координатній чверті.

Розв'язання.

Очевидно, графіком $x^2 + y^2 = 9$ є коло радіуса 3 із центром у початку координат. Коло в першій координатній чверті визначається функцією $y = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [0; 3]$. Тоді $y' = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$. Застосовуючи формулу $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$, визначаємо довжину дуги:

$$l = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}\right)^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}}\,dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{9 - x^2 + x^2}{9 - x^2}}\,dx = \int_0^3 \frac{3dx}{\sqrt{9 - x^2}} = 3\arcsin\frac{x}{3}\Big|_0^3 =$$

$$= 3(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{3\pi}{2}(од.\ довж.)$$

Приклад 3.48. Обчислити площу поверхні частини параболоїда, утвореного обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = 2x$ при $0 \le x \le 4$.

Розв'язання.

Маємо

$$y = \sqrt{2x}; \qquad y' = \frac{1\cdot 2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}; \qquad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} = \sqrt{\frac{1 + 2x}{2x}}.$$

За формулою (3.26) знаходимо

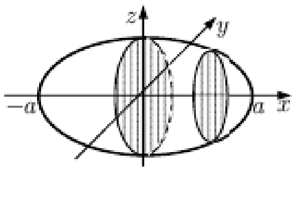
$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = 2\pi\int_0^4 \sqrt{2x}\cdot\sqrt{\frac{1 + 2x}{2x}}\,dx = 2\pi\int_0^4 \sqrt{1 + 2x}\,dx = \pi\int_0^4 (1 + 2x)^{\frac{1}{2}}d(1 + 2x) =$$

$$= \pi\frac{(1 + 2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{2\pi}{3}\left((1 + 2\cdot 4)^{\frac{3}{2}} - (1 + 0)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2\pi}{3}\cdot\left(9^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{2\pi}{3}\cdot 26 = \frac{52\pi}{3}\ (кв.\ од.)$$

Приклад 3.49. Обчислити об'єм тіла, обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > 0,\ \ b > 0,\ \ c > 0$.

Розв'язання.

Об'єм тіла за відомою площею перерізу його площиною, перпендикулярною до осі Ox знаходять за формулою (3.23):



$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Кожний переріз тіла, обмеженого еліпсоїдом, площиною $x = x,\ -a \le x \le a$ є плоскою фігурою, що обмежена еліпсом:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1,$$

з півосями $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ та $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Площа еліпса (приклад 3.45) дорівнює

$$S(x)=\pi\cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right), \quad -a\le x\le a.$$

Отже, об'єм тіла дорівнює

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi bc\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=2\pi bc\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right)-0=$$

$$=2\pi bc\left(a-\frac{1}{3}a\right)=2\cdot\frac{2}{3}\pi abc=\frac{4}{3}\pi\, abc(куб.\ од.).$$

Приклад 3.50. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2=3x-3,\ x=1,\ x=4$.

Розв'язання.

У прямокутній системі координат будуємо фігуру, обмежену даними лініями (рис. 3.17). За формулою (3.24) об'єм тіла буде таким:

$$V=\pi\int_1^4 y^2dx=\pi\int_1^4(3x-3)dx=\frac{3\pi}{2}(x-1)^2\Bigg|_1^4=\frac{27}{2}\pi\ (кв.\ од.)$$

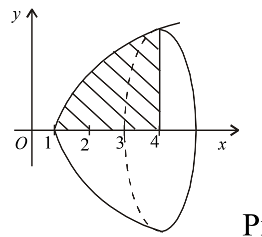


Рис. 3.17

Приклад 3.51. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, яка змінюється за законом $\upsilon=2t+1\,(м/с)$. Знайти шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від $t_1=1с$ до $t_2=3с$.

Розв'язання.

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\upsilon(t)dt.$$

Тоді $S=\int_1^3(2t+1)dt=\left(\frac{2t^2}{2}+t\right)\Bigg|_1^3=(3^2+3)-(1^2+1)=12-2=10(м).$

Приклад 3.52. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з ями глибиною $4м$, що має квадратний переріз із стороною $2м$. Густина води $\rho=10^3\,(кг/м^3)$.

Розв'язання.

$$A=\int_a^b F(x)dx.$$

$$F(x)=S_{осн}\mathrm{H}\rho\mathrm{g}=4\rho\mathrm{g}(4-\mathrm{x}), \quad x\in[0;4], \quad g\approx 9{,}8м/с^2.$$

$$A=\int_0^4 4\rho g(4-x)dx=4\rho g\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=4\rho g\left(16-\frac{16}{2}\right)-0=4\cdot 8\cdot 10^3\cdot 9{,}8\approx 313600(Дж).$$