3.4 Невласні інтеграли

Розглядаючи визначений інтеграл як границю інтегральних сум, передбачали, що відрізок інтегрування скінченний, а підінтегральна функція на цьому відрізку обмежена. Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним: у випадку нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на n частинних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума явно не має скінченної границі. Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до невласного інтеграла – інтеграла від функції на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

I. Невласні інтеграли із нескінченним проміжком інтегрування (невласні інтеграли першого роду).

Нехай $f(x)$ інтегрована для будь-якого скінченного $b \in [a;+\infty)$, так що $\int_a^b f(x)dx$ існує.

Означення. Границя $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ називається *невласним інтегралом від функції* $f(x)$ *на нескінченному проміжку* $[a;+\infty)$ або *невласним інтегралом першого роду* і позначається так: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Якщо ця границя існує та скінченна, то невласний інтеграл називається *збіжним*, а якщо не існує (зокрема нескінченна), то — *розбіжним*.

Якщо $f(x)$ — інтегрована для скінченних a та b, тобто $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, формули для обчислення невласних інтегралів на нескінченному проміжку мають вигляд:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\left(F(b) - F(a)\right), \qquad (3.27)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\left(F(b) - F(a)\right), \qquad (3.28)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx, \qquad (3.29)$$

де c – довільне дійсне число.

Приклад 3.53. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність $\int_{-\infty}^{0} e^{3x}dx$.

Розв'язання. За формулою (3.28) маємо

$$\int_{-\infty}^{0} e^{3x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{3x}dx = \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\left(e^{3x}\right)\Big|_a^0 = \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\left(e^{0} - e^{a}\right) = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}.$$

Отже, інтеграл збіжний і дорівнює $\frac{1}{3}$.

Коментар. Маємо невласний інтеграл 1-го роду, оскільки проміжок інтегрування нескінченний і підінтегральна функція на ньому неперервна.

Приклад 3.54. Дослідити на збіжність інтеграл Діріхле

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}. \tag{3.30}$$

Розв'язання. Для розв'язування задачі розглянемо такі три випадки:

I. $p=1$. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln b - \ln 1\right) = +\infty$, інтеграл розбіжний.

II. $p<1$. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_1^b = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-p}-1\right) = +\infty$, інтеграл розбіжний.

III. $p>1$. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_1^b = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-p}-1\right) = \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1}$,

інтеграл збіжний.

Отже, інтеграл Діріхле збіжний при $p>1$ та розбіжний при $p\le 1$.

Крім безпосереднього обчислення невласних інтегралів при дослідженні їх на збіжність існують і інші методи.

Одним із таких методів можна встановити збіжність інтеграла Пуассона (рис. 3.18)

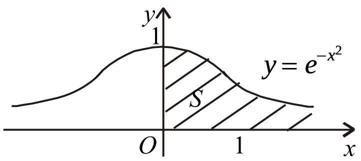

Рис. 3.18

$$S = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{3.31}$$

особливість якого полягає в тому, що первісна для підінтегральної функції $f(x)=e^{-x^2}$ не виражається через елементарні функції.

У деяких випадках достатньо встановити лише збіжність чи розбіжність розглядуваного інтеграла, при цьому можна скористатися методом порівняння, що базується на такій теоремі:

Теорема 12. Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і виконується нерівність $0\le f(x)\le g(x)$, то зі збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ або з розбіжності $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Звичайно, для порівняння вибирається інтеграл, збіжність якого відома, наприклад інтеграл Діріхле.

Приклад 3.55. Дослідити збіжність інтеграла $\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

Розв'язання.

$0\le f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}=g(x),\ \ x\in[1;\,+\infty)$.

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ — збіжний, як інтеграл Діріхле із $p=2>1$, тому буде збіжним і $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

Теорема 13. Якщо існує границя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k,\qquad 0<k<+\infty,\qquad (f(x)>0,\quad g(x)>0),$$

то інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.

Приклад 3.56. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$.

Розв'язання.

Оскільки інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ — збіжний, як інтеграл Діріхле із $p=2>1$ і

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}}=1,$$

то заданий інтеграл також збігається.

II. Обчислення невласних інтегралів від розривних (необмежених) функцій

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(a;\, b]$. Точку $x=a$ назвемо особливою точкою функції $f(x)$, якщо $f(x)\to\infty$ при $x\to a+0$ (функція $f(x)$ при $x=a$ має розрив 2-го роду). Нехай функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a+\varepsilon;\, b]$ при довільному $\varepsilon>0$ такому, що $a+\varepsilon<b$; тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

її називають *невласним інтегралом від розривної (необмеженої) функції* $f(x)$ або *невласним інтегралом другого роду* і позначають

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо ця границя існує, то інтеграл називається *збіжним*, а якщо не існує, то — *розбіжним*.

Для обчислення таких невласних інтегралів використовують такі формули:

I. $x=a$ — точка розриву $f(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\big(F(b)-F(a+\varepsilon)\big).$ (3.32)

II. $x=b$ — точка розриву $f(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\big(F(b-\varepsilon)-F(a)\big).$ (3.33)

III. $x=c\in(a;\, b)$ — точка розриву $f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx. \qquad (3.34)$$

Зауваження. До невласних інтегралів, які мають точку розриву, що є внутрішньою для $[a;\ b]$, не можна застосувати формулу Ньютона—Лейбніца.

Ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду аналогічні ознакам збіжності невласних інтегралів першого роду.

Приклад 3.57. Обчислити $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Розв'язання. Неправильне розв'язання: $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-1-\left(-\frac{1}{-1}\right)=-2$.

Правильне розв'язання: $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)\Rightarrow\ \Rightarrow x=0\in[-1;\ 1]$ — точка розриву 2-го роду функції $f(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ — невласний.

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon_1}+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon_2}^{1}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-1\right)+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=+\infty+\infty=+\infty\Rightarrow \text{ інтеграл розбіжний.}$$

Приклад 3.58. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність $\int\limits_{1}^{5}\frac{dx}{x\ln x}$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ має дві точки розриву: $x_1=0\notin[1;\ 5]$, $x_2=1\in[1;\ 5]$.

Оскільки $x=1$ є точкою нескінченного розриву, то маємо невласний інтеграл 2-го роду.

$$\int\limits_{1}^{5}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{5}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln|\ln x|\Big\|_{1+\varepsilon}^{5}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\ln 5-\ln\ln(1+\varepsilon)\right)=+\infty.$$

Інтеграл розбіжний.

Коментар. Межі інтегрування є скінченними. Досліджуючи невласний інтеграл за означенням, відступаємо всередину проміжку інтегрування.

Приклад 3.59. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{5}\frac{\sin x\,dx}{x^2}$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$ має особливу точку $x=0$, оскільки $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)=\infty$. Порівняємо її з $g(x)=\frac{1}{x}$, інтеграл від якої $\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{x}$ розбіжний. Враховуючи, що $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, за граничною ознакою порівняння доходимо висновку, що інтеграл $\int\limits_{0}^{5}\frac{\sin x\,dx}{x^2}$ розбіжний.