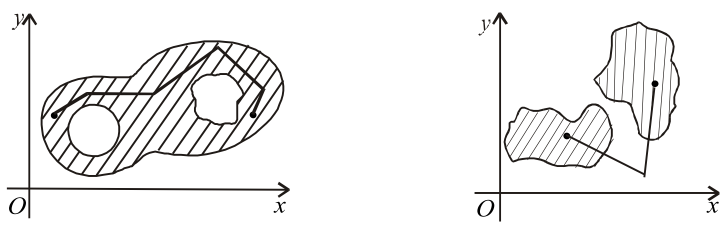
4.1. Функції багатьох змінних. Основні поняття

Множини точок на площині а в n-вимірному просторі

Упорядкованій парі чисел $(x_0; y_0)$ на координатній площині відповідає одна точка $P_0(x_0; y_0)$. Аналогічно, в n-вимірному просторі n упорядкованим дійсним числам відповідає одна точка $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, де числа $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ будуть координатами цієї точки. З метою скорочення запису далі розглядатимемо множини точок на площині, але подані далі означення можна вважати правильними і в разі n-вимірного простору.

Означення. Множина точок називається *зв'язною*, якщо будь-які її дві точки можна сполучити ламаною лінією так, щоб усі точки цієї лінії належали цій множині.

Приклад. На рис. 4.1 у випадку а) буде зв'язна множина, а у випадку б) — не зв'язна.

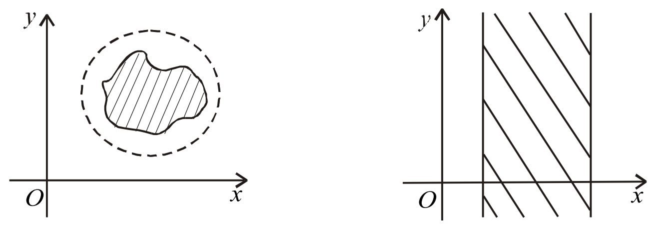


а)　　　　　　*б*)

Рис. 4.1

Означення. Множина точок називається *обмеженою*, якщо всі її точки належать множині точок круга скінченного радіуса.

Приклад. На рис. 4.2 у випадку а) маємо обмежену множину, а у випадку б) — необмежену.



а)　　　　　　*б*)

Рис. 4.2

Означення. Множина точок, координати яких задовольняють нерівність

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2 < \delta^2 \tag{4.1}$$

називається δ*-околом точки* $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Зауваження. У випадку двовимірного простору нерівність (4.1) можна подати у вигляді

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2. \tag{4.2}$$

Вона означає внутрішність круга з радіусом $R=\varepsilon$ та з центром у точці $P_0(x_0;\ y_0)$ (рис. 4.3). Якщо з δ-околу точки P_0 вилучимо саму точку P_0, дістанемо *виколотий δ-окіл* точки P_0.

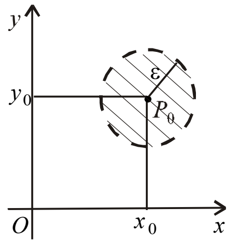


Рис. 4.3

Означення. Точка називається *внутрішньою* для множини точок, якщо вона належить цій множині разом з деяким своїм δ-околом, і *зовнішньою*, якщо існує її окіл з точок, жодна з яких не належить цій множині.

Означення. Зв'язна множина, яка складається тільки з внутрішніх точок, називається *відкритою областю* (або просто *областю*).

Область позначатимемо: $D=\{(x;\ y)\in R^2 \mid \quad \varphi(x;\ y)\le \text{const}\}$.

(Читаємо: область D є множина точок площини з координатами $(x; y)$, таких що $\varphi(x;\ y)\le\text{const}$.)

У частинному випадку, коли D — прямокутник, область позначатимемо

$$D=\{(x;\ y)\in R^2 \mid \quad a\le x\le b,\ c\le y\le d\}.$$

Приклад. На рис. 4.4 множина точок D — область: $D=\{(x;\ y)\in R^2 | 1<x<3,\ 1<y<2\}$.

Означення. Точка називається *межовою* для області, якщо в будь-якому її δ-околі існують точки, що не належать області і належать їй.

Означення. Множина межових точок називається *межею області*.

Означення. Область, об'єднана зі своєю межею, називається *замкненою областю*.

Приклад. На рис. 4.5 $D=\{(x,y)\in R^2 | x^2+y^2\le 9\}$ — замкнена область, $x^2+y^2=9$ — рівняння межі області, K — внутрішня, L — зовнішня, M — межова точка.

Означення. Множина називається *опуклою*, якщо будь-які точки множини можна зв'язати відрізком, який буде належати цій множині.

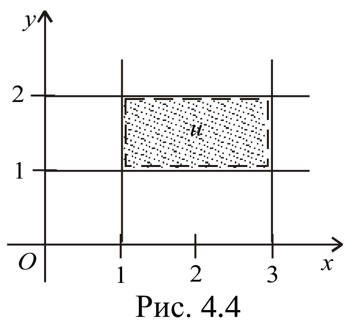


Рис. 4.4

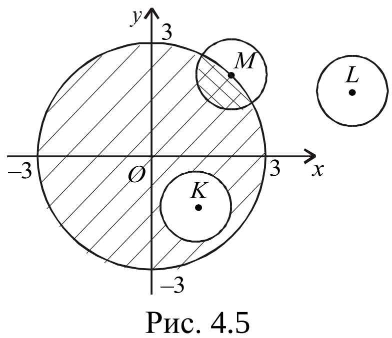


Рис. 4.5

Означення функції багатьох змінних

Означення. Якщо кожній точці $P(x_1; x_2; ...; x_n)$ множини D n-вимірного простору поставлено у відповідність за деяким законом одне і тільки одне дійсне число $z\in E\subset R$, то кажуть, що в області $D\subset R^n$ задано функцію n незалежних змінних $z=f(x_1;\ x_2;\ ...; x_n)$. При цьому D називають *областю визначення функції*, E — *областю значень функції*.

Згідно з означенням функцію $z=f(x_1; x_2; ...; x_n)$ можна розглядати як функцію точки і записувати $z=f(P)$.

Зокрема, при $n = 2$ говорять, що задана *функція двох змінних* $z = f(x; y)$, якщо кожній парі $(x; y) \in D$ на площині поставлено у відповідність тільки одне число z. Для прикладних задач має значення розгляд функції двох або трьох незалежних змінних. Тому в подальшому більше уваги звертатимемо на ці функції.

Наведемо **приклади** функції двох змінних: а) площу S прямокутника із сторонами a та b знаходять за формулою $S = ab$. Кожній парі значень a і b відповідає єдине значення площі, тобто S – функція двох змінних: $S = f(a; b)$;

б) за законом Ома електрорушійна сила E, сила струму I та опір R замкнутого електричного кола пов'язані співвідношенням $E = IR$. Тут E є функцією змінних I та R: $E = (I; R)$.

в) витратами на виробництво даного виробу при даній техніці виробництва є функція матеріальних витрат x і витрат на оплату робочої сили y: $z = f(x; y)$.Це є функція *витрат виробництва*.

Множину пар $(x; y)$ значень x та y, для яких функція $z = f(x; y)$ визначена, називають *областю визначення цієї функції* і позначають D або $D(f)$. Областю визначення функції є деяка множина точок площини Oxy. Зокрема, областю визначення функції може бути вся площина, або частина площини, обмежена певними лініями.

Приклад 4.1. Знайти область визначення функції та надати їй геометричну інтерпретацію:

а) $z = \dfrac{2x + y}{x - y}$;

б) $z = \sqrt[4]{1 - x^2 - y^2}$;

в) $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 4\right)$;

г) $z = \dfrac{\ln\left(4 - x^2 - y^2\right)}{\sqrt{4x - y}}$.

Розв'язання.

а) Функція визначена, якщо $x - y \neq 0,\ \ x \neq y$. Геометрично це означає, що область визначення складається з усіх точок, що лежать на координатній площині, крім тих які лежать на прямій $y = x$ (рис. 4.6).

б) Функція визначена, якщо $1 - \left(x^2 + y^2\right) \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 1$. Це є коло з центром (0;0) та радіусом 1 (рис. 4.7).

в) Функція визначена, якщо $x^2 + y^2 - 4 > 0$, тобто $x^2 + y^2 > 4$ (рис. 4.8).

г) Знайдемо область визначення функції аналітично $D = \left\{(x; y) \in R^2 \middle| 4 - x^2 - y^2 > 0,\ \ 4x > y\right\}$.

Нерівності в D замінюємо рівностями і будуємо лінії, що їм відповідають на координатній площині, а саме: $x^2 + y^2 = 4$; $y = 4x$.

Визначаємо за допомогою контрольних точок $P_1\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$, $P_2(1; 2)$ розміщення D на площині і заштриховуємо її (рис. 4.9).

$$\left.\begin{array}{c} 4-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2=4-\dfrac{1}{4}-\dfrac{9}{4}=\dfrac{5}{4}>0 \\ 4\cdot\dfrac{1}{2}>-\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow P_1\in D$$

$$\left.\begin{array}{c} 4-1^2-2^2=-1>0 \\ 4>2 \end{array}\right\}\Rightarrow P_2\notin D.$$

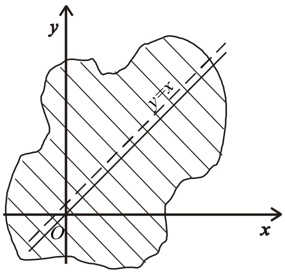


Рис. 4.6

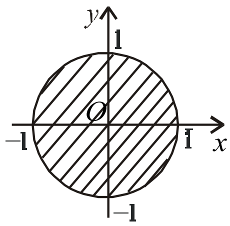


Рис. 4.7

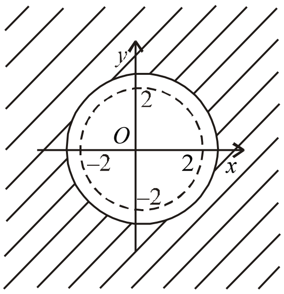


Рис. 4.8

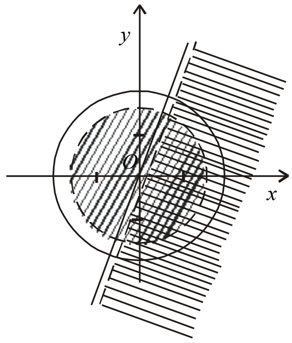


Рис. 4.9

Способи задання функції

Як і функцію однієї змінної, функції двох змінних можна зобразити:

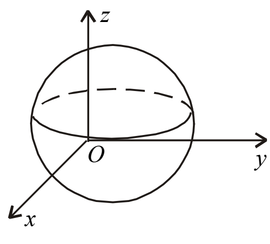
— *аналітично* (у вигляді формули), наприклад: $z=x\left(y^2+2x\right)$,

— *таблично* (у вигляді таблиці), наприклад:

таблицею задана функція $z=xy$;

x \ y	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8

— *графічно*:



Для графічного зображення функції двох змінних використовуємо систему координат $Oxyz$ у тривимірному просторі (рис. 4.10).

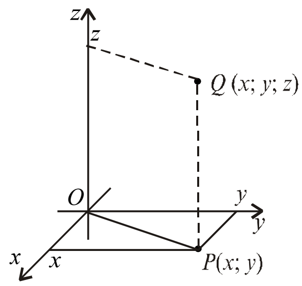


Рис. 4.10

Кожній парі чисел x та y відповідає точка $P(x;y)$ площини Oxy. У точці $P(x;y)$ проводимо пряму, перпендикулярну до площини Oxy, та позначаємо на ній відповідне значення функції z; дістаємо в просторі точку Q з координатами $(x;y;z)$, яка позначається символом $Q(x;y;z)$. Точки Q, які відповідають різним значенням незалежних змінних, утворюють певну поверхню у просторі. Така поверхня є *графічним зображенням функції* $z=f(x;y)$.

Зауваження. На практиці побудувати графік функції важко, адже йдеться про зображення на площині просторової фігури, а це не завжди вдається.

Приклад. Графічне зображення функції $z=1-x-y$ є площина, яка проходить через точки $(0;0;1)$, $(0;1;0)$, $(1;0;0)$ (рис. 4.11).

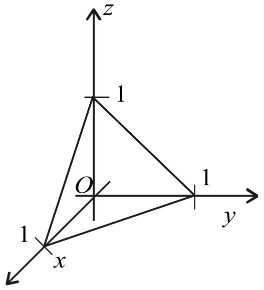


Рис. 4.11

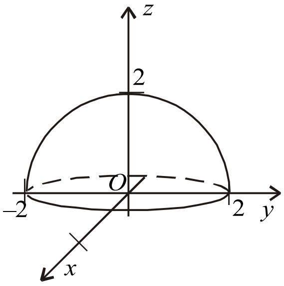


Рис. 4.12

Графічне зображення функції $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ є півкуля (рис. 4.12).

Існує й інший спосіб геометричного зображення функції двох змінних — зображення за допомогою *ліній рівня*.

Означення. *Лінією рівня* називається множина всіх точок площини, в яких функція $z=f(x;y)$ набуває однакових значень.

Рівняння ліній рівня записують у вигляді $f(x;y)=C$.

Тобто, лінія рівня на площині Oxy – це проекція кривої, утвореної перерізом поверхні $z=f(x;y)$ площиною $z=C$.

Якщо покласти $C=C_1, C_2, ..., C_n, ...$ вибираючи ці числа в арифметичній прогресії з різницею h, то дістанемо низку ліній рівня, за взаємним розташуванням яких можна вивчити поведінку функції (рис. 4.13). Зокрема, де лінії густіші, функція міняється швидше (поверхня, що зображує функцію, йде крутіше), а там, де лінії рівня розташовані рідше, функція міняється повільніше (відповідна поверхня вологіша).

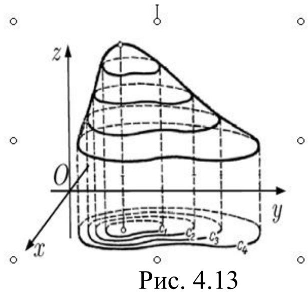


Рис. 4.13

Елементарний приклад зображення функції за допомогою ліній рівня є зображення рельєфу місцевості на географічній карті. Висота місцевості над рівнем моря є функцією координат точки земної поверхні. За лініями рівня висоти, нанесеними на карту, легко уявити собі рельєф даної місцевості.

Для функцій трьох змінних $u = f(x; y; z)$ розглядають *поверхні рівня* – множини точок $M(x; y; z)$ простору, які справджують рівність

$$f(x; y; z) = C.$$

Приклад 4.2. Дослідити лінії рівня функції $z = xy$ і побудувати їх.

Розв'язання. Лінії рівня мають вигляд $xy = C$.

При $C = 0$ лінія рівня розпадається на пару прямих, що перетинаються (осі Ox і Oy).

При $C > 0$ лінія рівня є гіперболою $y = \dfrac{C}{x}$, гілки якої лежать у першій та третій чвертях.

При $C < 0$ лінія рівня є гіперболою $y = \dfrac{C}{x}$, гілки якої лежать у другій та четвертій чвертях.

На основі здійсненого аналізу можна стверджувати, що графіком цієї функції є гіперболічний параболоїд (оскільки серед поверхонь другого порядку такі лінії рівня має тільки гіперболічний параболоїд). Схематично лінії рівня зображено на рис. 4.14.

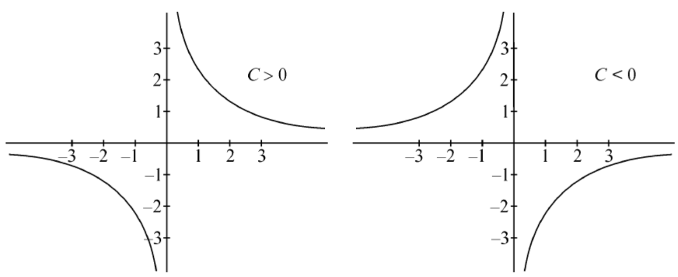


Рис. 4.14

Границя функції двох змінних

Означення. Число B називається *границею функції* $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що при виконанні нерівності $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ виконується нерівність $|f(x; y) - B| < \varepsilon$ і позначається $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x; y) = B$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x; y) = B$.

Зауваження. Для функції багатьох змінних справедливі теореми про границю суми, добутку та частки, які аналогічні відповідним теоремам для функції однієї незалежної змінної.

Наведемо формулювання відповідних теорем.

Теорема 1. Якщо функція $z = f(x; y)$ має границю при $(x; y) \to (x_0; y_0)$, то вона єдина.

Теорема 2. Якщо функція $z = f(x; y)$ має границю при $(x; y) \to (x_0; y_0)$, то вона обмежена в деякому околі точки $(x_0; y_0)$.

Теорема 3. Якщо $\lim\limits_{(x;\, y)\to(x_0;\, y_0)} f(x; y) = b$, $\lim\limits_{(x;\, y)\to(x_0;\, y_0)} g(x; y) = c$ і в деякому околі точки $(x_0; y_0)$ виконується нерівність $f(x; y) \le g(x; y)$, то $b \le c$.

Теорема 4. Нехай $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} f(x;\ y)=b$, $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} g(x;\ y)=c$. Тоді:

1) $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} \big(f(x;\ y)+g(x;\ y)\big)=b+c$;

2) $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} f(x;\ y)\cdot g(x;\ y)=b\cdot c$;

3) $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} \dfrac{f(x;\ y)}{g(x;\ y)}=\dfrac{b}{c} \quad (c\neq 0)$.

Приклад 4.3. Обчислити $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} \dfrac{x^2+y^3}{2x-3y}$.

Розв'язання. Згідно з теоремами про арифметичні операції з границями, а також те, що границя сталої дорівнює сталій, тобто $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} x=1$, $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} y=2$, маємо

$$\lim_{(x;y)\to(1;2)} \frac{x^2+y^3}{2x-3y}=\frac{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)}\left(x^2+y^3\right)}{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)}(2x-3y)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} x^2+\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} y^3}{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} 2x-\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} 3\cdot y}=\frac{1+2^3}{2-3\cdot 2}=-\frac{9}{4}.$$

Приклад 4.4. Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+2xy)}{\sin 3xy}$.

Розв'язання. Візьмемо $xy=t$. Тоді з того, що $(x;y)\to(0;0)$ випливає $t\to 0$ і задану границю можна переписати у вигляді $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+2t)}{\sin 3t}$. При $t\to 0$ маємо $\ln(1+2t)\sim 2t$; $\sin 3t\sim 3t$, тобто $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+2t)}{\sin 3t}= \ =\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{3t}=\dfrac{2}{3}$. Таким чином, $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{(1+2xy)}{\sin 3xy}=\dfrac{2}{3}$.

Зауваження. Між поняттями границі в точці для функції однієї змінної та функції багатьох змінних є багато спільного, але є й принципова відмінність, яка робить поняття границі функції кількох змінних суттєво більш обмеженим, ніж поняття границі функції однієї змінної.

Річ у тім, що коли $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ ($f(x)$ — функція однієї змінної), то це означає, що і лівостороння і правостороння границі дорівнюють b. Правильним є й обернене: з існування та збігу двох односторонніх границь випливає існування границі функції в точці.

Для функції двох змінних $z=f(x;y)$ наближатися до точки $(x_0;y_0)$ можна нескінченною множиною способів: і справа, і зліва, і зверху, і знизу, і під кутом 30° до осі Ox тощо (рис. 4.15).

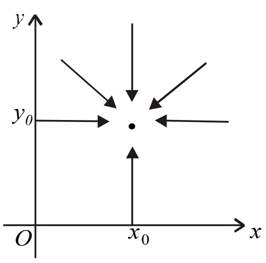


Рис. 4.15

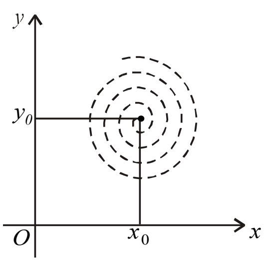


Рис. 4.16

Більше того, до точки можна наближатися не тільки по прямій, а й по більш складних траєкторіях (рис. 4.16).

Очевидно, що рівність $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=b$ правильна тоді й тільки тоді, коли границя дорівнює b при наближенні до точки $(x_0;y_0)$ по будь-якій траєкторії. Це суттєво більш обмежене, ніж збіг двох односторонніх границь у випадку функції однієї змінної.

Приклад 4.5. Довести, що $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Розв'язання. Будемо наближатися до точки $(0;0)$ по прямій $y=kx$. Якщо $y=kx$, тоді $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xkx}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$.

Зауважимо, що значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої, наприклад:

при $k=1$ границя дорівнює $1/2$.

при $k=2$ границя дорівнює $2/5$ і т. п.

Таким чином, якщо наближатися до точки $(0;0)$ з різних напрямків, то дістанемо різні значення, тобто границя $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Приклад 4.6. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to0}} \dfrac{\sin xy}{y}$.

Розв'язання.

$$\lim_{\substack{x\to2\\y\to0}} \frac{\sin xy}{y} = \left| \begin{array}{c} \sin xy \sim xy \\ xy\to 0 \end{array} \right| = \lim_{\substack{x\to2\\y\to0}} \frac{xy}{y} = \lim_{\substack{x\to2\\y\to0}} x = 2.$$

Коментар. Границя існує, якщо вона не залежить від способу прямування точки $(x;y)$ до точки $(2;0)$. Для функції кількох змінних залишаються правдивими еквівалентності.

Зауваження. Нехай дано функцію двох змінних $z=f(x;y)$. Розглянемо границі, які дістаємо після послідовних граничних переходів за кожним із аргументів окремо в тому чи іншому порядку.

Якщо при будь-якому фіксованому y з Y існує для функції $f(x;y)$ (яка буде функцією від x) границя при $x\to a$, то ця границя, взагалі кажучи, буде залежати від наперед фіксованого y:

$$\lim_{x\to a} f(x;\ y) = \varphi(y).$$

Далі постає запитання про границю функції $\varphi(y)$ при $y\to b: \lim\limits_{y\to b}\varphi(y) = \lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x;\ y)$ — це буде одна із двох повторних границь. Іншу дістанемо, якщо границі візьмемо в зворотному порядку

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,\ y).$$

Повторні границі не обов'язково рівні.

Приклад. Нехай

1) $f(x;\ y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ і $a=b=0$, тоді: $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to 0} f(x;\ y)=y-1$,

$\lim\limits_{y\to 0}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x;\ y)=-1$,

але водночас $\varphi(x)=\lim\limits_{y\to 0} f(x;\ y)=x+1$, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x;\ y)=1$. Отже, $1\neq -1$.

Може статися так, що одна з повторних границь існує, друга — ні.

Розглянемо приклади:

2) $f(x;\ y)=\dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$ або

3) $f(x;\ y)=x\cdot\sin\dfrac{1}{y}$.

В обох випадках існує повторна границя $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f$, але немає повторної границі $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f$ (в останньому прикладі навіть не існує простої границі $\lim\limits_{y\to 0} f$).

Приклади показують, що можливість перестановки границь повинна бути обґрунтована. У зв'язку з цим виконується наступна теорема, що встановлює зв'язок між подвійною і повторною границями.

Теорема 5. Якщо 1) існує (скінченна або ні) подвійна границя $A=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x;\ y)$ і 2) при будь-якому y з Y існує (скінченна) звичайна границя по x $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to a} f(x;\ y)$, то існує повторна границя $\lim\limits_{y\to b}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x;\ y)$, яка дорівнює подвійній границі.

З теореми 5 випливає, що в прикладах 1) і 2) подвійна границя не існує. У прикладі 3), навпаки, подвійна границя існує: З нерівності $\left|x\cdot\sin\dfrac{1}{y}\right|\le |x|$ випливає, що вона дорівнює нулю.

Не обов'язково існування подвійної границі необхідне для рівності повторних.

У прикладі $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ обидві повторні границі існують і рівні 0, але подвійної границі немає.

Неперервність функції двох змінних

Означення. Функція $z=f(x;y)$ називається *неперервною* в точці $P_0(x_0;y_0)$, якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=f(x_0;y_0)$.

Означення. Функція $z=f(x;y)$ називається *неперервною* в області (замкненій чи відкритій), якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Приклад 4.7. Знайти точки розриву функції $z=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}$.

Розв'язання.

Для заданої функції точками розриву можуть бути лише точки, де знаменник дорівнює нулеві:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$$

Оскільки $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ y\to -2}} \dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}=\infty$, то точка $M_0(1;-2)$ є точкою нескінченного розриву.

Приклад 4.8. Знайти точки розриву функції $f(x;y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x^2+y^2>0) \\ 0, & (x^2+y^2=0) \end{cases}$

Розв'язання.

Ця функція має розрив у точці $(0;0)$, бо в точці для функції $f(x;y)$ границі не існує.

Тут ми спостерігаємо цікаве явище. Функція, що розглядається, не є неперервною в точці $(0;0)$ по двох змінних водночас, але є неперервною по змінних x та y окремо.

Приклад. Точки розриву можуть бути не тільки ізольованими, як у попередніх прикладах, а й заповнювати лінії, поверхні і т. п. Так, функції двох змінних $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, $f(x;y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ мають розриви: перша — прямі $y=\pm x$, друга — окіл $x^2+y^2=1$.

Для функції трьох змінних $f(x;\ y;\ z)=\dfrac{x+y+z}{xy-z}$, $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$ розриви заповнюють у першому випадку гіперболічний параболоїд $z=xy$, а в другому — конус $z^2=x^2+y^2$.

Означення. Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена на множині E, а змінні x і y, у свою чергу, залежать від змінних u та v і $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$, де обидві функції $x(u;v)$ та $y(u;v)$ визначені на множині D. Якщо для будь-якого $(u;v)\in D$ значення $x(u;v)$, $y(u;v)$ такі, що $(x;y)\in E$ (рис. 4.17), то кажуть, що на множині D визначена *складна функція* $z=f(x;y)$, де $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$; x, y — проміжні змінні, u, v — незалежні змінні.

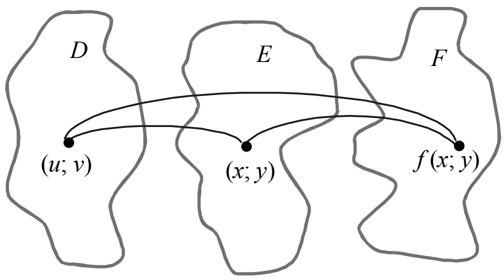


Рис. 4.17

Приклад. Функція $z=x^3+y^3$, де $x=\sin(u+v)$, $y=\cos(u-v)$ — складна функція. Вона визначена на координатній площині. Її можна записати у вигляді $z=\sin^3(u+v)+\cos^3(u-v)$.

Означення. Функцію $z=f(x;\ y)$, яка визначена на множині $D\in R^2$, називають *неперервною по множині* $x\in D$ в точці $(x_0;\ y_0)\in D$, якщо $\lim\limits_{\substack{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0) \\ (x;\ y)\in D}} f(x;\ y)=f(x_0;\ y_0)$.

Теорема 6. Нехай на множині D визначено складну функцію $z = f(x;y)$, де $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, і нехай функції $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$ неперервні в точці $(u_0;v_0)$, а функція $f(x;y)$ неперервна в точці $(x_0;y_0)$, де $x_0 = x(u_0;v_0)$, $y_0 = y(u_0;v_0)$. Тоді складна функція $z = f(x(u;v);y(u;v))$ неперервна в точці $(u_0;v_0)$.

Властивості неперервної функції двох змінних

Теорема 7. Якщо функція неперервна в точці, то вона обмежена деяким околом цієї точки.

Теорема 8. Якщо функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ неперервні в точці $(x_0;y_0)$, то в цій точці будуть неперервними $f(x;y) \pm g(x;y)$, $f(x;y) \cdot g(x;y)$, $f(x;y)/g(x;y)$ при $g(x_0;y_0) \neq 0$.

Теорема 9. Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на замкненій обмеженій множині, то вона обмежена на цій множині.

Теорема 10. Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на замкненій обмеженій множині, то серед її значень на цій множині є як найменші, так і найбільші.

Теорема 11 (*про нуль неперервної функції*). Нехай функція $f(x;y)$ неперервна на зв'язній множині D і набуває у двох точках A і B цієї множини значень різних знаків. Тоді у множині D знайдеться така точка, що в ній функція перетворюється на нуль.

Теорема 12 (*про проміжне значення*). Нехай функція $f(x;y)$ неперервна на зв'язаній множині D й у двох будь-яких точках A та B цієї множини набуває нерівних значень $f(A)$ та $f(B)$. Тоді на цій множині вона набуває будь-яких значень μ, яке лежить між $f(A)$ і $f(B)$, тобто існує така точка $c \in D$, що $f(c) = \mu$.