4.2. Диференційовність функцій двох змінних

Частинні та повний прирости функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0;y_0)$. Надамо незалежним змінним *x* та *y* приросту відповідно Δx та Δy так, щоб точка $P(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ не виходила за межі вказаного околу. Тоді й точки $K(x_0+\Delta x;y_0)$, $M(x_0;y_0+\Delta y)$ також належатимуть розглядуваному околу (рис. 4.18).

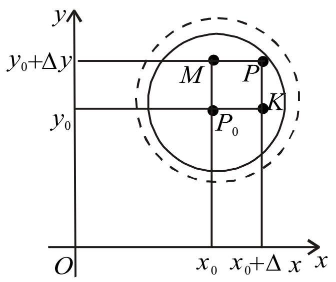

Рис. 4.18

Означення. Різницю $f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)$ *називають повним приростом* функції $z = f(x;y)$ при переході від точки $(x_0;y_0)$ до точки $(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$ і позначають Δz.

Означення. Різницю $f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0)$ називають *частинним приростом за* x функції $z = f(x;y)$ і позначають $\Delta_x z$.

Означення. Різницю $f(x_0;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)$ називають *частинним приростом за* y функції $z = f(x;y)$ і позначають $\Delta_y z$.

Таким чином,

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0),$$
$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0),$$
$$\Delta_y z = f(x_0;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0).$$

Зауваження. Аналогічно визначаються прирости функції більш ніж двох змінних.

Диференційовність функції двох змінних

Означення. Функція $z = f(x;y)$ називається *диференційовною* у точці $(x_0;y_0)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де *A*, *B* — числа, які не залежать від Δx та Δy, $\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)$, $\beta=\beta(\Delta x,\Delta y)$ — нескінченно малі при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y \to 0$ функції.

Теорема 13. Якщо функція $z = f(x;y)$ диференційовна в точці $(x_0;y_0)$, тоді існують границі $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ та $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ і вони дорівнюють відповідно A і B.

Означення. Нехай функція $z = f(x;\ y)$ визначена в точці $(x_0; y_0)$ і в її деякому околі. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x;\ y_0) - f(x_0;\ y_0)}{\Delta x},$$

то вона називається *частинною похідною за* x функції $z = f(x; y)$ у точці $(x_0; y_0)$ і позначається

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad z'_x, \qquad f'_x(x_0; y_0).$$

Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = z'_x$.

Означення. Нехай функція $z = f(x;\ y)$ визначена в точці $(x_0; y_0)$ і в її деякому околі. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0)}{\Delta y},$$

то вона називається *частинною похідною за* y функції $z = f(x; y)$ у точці $(x_0; y_0)$ і позначається

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad z'_y, \qquad f'_y(x_0; y_0).$$

Таким чином, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = z'_y$.

Із означення частинних похідних матимемо, що вони шукаються за тими правилами, що й похідні функції однієї змінної. Треба лише пам'ятати, що при знаходженні z'_x **змінна** y вважається **сталою**, а при знаходженні z'_y **змінна** x вважається **сталою.**

Тепер можна сформулювати **теорему 13** інакше:

Теорема 14 *(необхідна умова диференційовності функції* $z = f(x;\ y)$ *у точці).* Якщо функція $z = f(x;\ y)$ диференційовна в точці $(x_0;\ y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні z'_x і z'_y.

Приклад 4.9. Знайти z'_x і z'_y для функції $z = x^2 y + xy^2$.

Розв'язання.

Знайдемо z'_x, вважаючи $y = \text{const}$: $z'_x = 2xy + y^2$.

Знайдемо z'_y, вважаючи $x = \text{const}$: $z'_y = x^2 + 2xy$.

Коментар. Знаходячи частинні похідні функції z за змінною x (y), вважаємо y (x) сталою і використовуємо правила і формули диференціювання функцій однієї змінної.

Приклад 4.10. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + \operatorname{tg} x + \ln y$.

Розв'язання. Знайдемо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \text{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \text{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Приклад 4.11. Для функції $f(x;\ y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-(x-a)^2/4y}$ знайти f'_x і f'_y.

Розв'язання.

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{-(x-a)}{2y} e^{-(x-a)^2/4y}, \qquad f'_y = \left(-\frac{1}{2y^{3/2}} + \frac{(x-a)^2}{4y^{5/2}}\right) e^{-(x-a)^2/4y}.$$

Приклад 4.12. Знайти частинні похідні першого порядку функції $u = z^{xy}$.

Розв'язання.

$$u'_x = y z^{xy} \ln z, \qquad u'_y = x z^{xy} \ln z, \qquad u'_z = x y z^{xy-1}.$$

Коментар. Функція u залежить від трьох змінних $x,\ y,\ z$. Знаходячи частинні похідні за кожною змінною, інші дві вважаємо сталими.

Означення. *Головна лінійна частина повного приросту функції*, тобто $A\Delta x + B\Delta y$, називається *повним диференціалом функції* (точніше першим диференціалом) двох змінних $f(x;\ y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$ і позначається dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Диференціали незалежних змінних збігаються з їхніми приростами: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді, як випливає із означення повного диференціала і теореми 13, повний диференціал функції $z = f(x; y)$ можна обчислити за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \qquad (4.3)$$

Аналогічно повний диференціал функції трьох аргументів $u = f(x; y; z)$ обчислюється за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \qquad (4.4)$$

Приклад 4.13. Знайти du, якщо $u = x^{y^2 z}$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^{y^2 z} \ln x\right) \cdot 2yz, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = y^2 x^{y^2 z} \ln x.$$

Отже, $du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2yz x^{y^2 z} \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$.

Приклад 4.14. Знайти dz, якщо $z = \ln(x + \ln y)$.

Розв'язання.

Повний диференціал функції двох змінних обчислюється за формулою: $dz = z'_x dx + z'_y dy$.

Знайдемо z'_x і z'_y.

$$z'_x = \frac{1}{x + \ln y}; \qquad z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}.$$

Отже, $dz = \frac{1}{x + \ln y}\left(dx + \frac{1}{y}dy\right)$.

Геометричний зміст частинних похідних. Якщо функцію $z = f(x; y)$, що має частинні похідні в точці $(x_0; y_0)$, розглядати за умови $y = y_0$, то геометрично це означає, що поверхня $z = f(x; y)$ перетинається площиною $y = y_0$, паралельно координатній площині Oxz; у перерізі дістаємо лінію. Тоді $f'_x(x_0; y_0)$ є *кутовим коефіцієнтом дотичної* до *зазначеного перерізу* в точці $(x_0; y_0)$, тобто *тангенсом* кута нахилу цієї дотичної до *додатного напряму* осі Ox. Аналогічно, $f'_y(x_0; y_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної, що проходить через точку $(x_0; y_0)$, до кривої, яка утворюється в результаті перетину поверхні $z = f(x; y)$ з площиною $x = x_0$.

Достатня умова диференційовності функції двох змінних у точці

Для функції однієї змінної твердження щодо її диференційовності та існування похідної є рівносильними. У випадку функції двох змінних ми маємо інше: існування частинних похідних — необхідна умова диференційовності функції в точці, але не є достатньою умовою диференційовності: наприклад, для функції

$$z = f(x; y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x; y) \neq (0;\ 0) \\ 0, & (x; y) = (0;\ 0) \end{cases}$$

у точці $(0;0)$: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Але ця функція розривна в точці $(0;0)$, а тому функція не може бути диференційовною в цій точці. Таким чином, для диференційовності функції $z = f(x; y)$ у точці $(x_0; y_0)$ недостатньо тільки існування частинних похідних: потрібно додатково вимагати неперервності частинних похідних, що випливає з поданої далі теореми.

Теорема 15 *(достатня умова диференційованості.)* Якщо функція $z = f(x; y)$ у деякому околі точки $(x_0; y_0)$ має неперервні частинні похідні, тоді вона диференційовна в точці $(x_0; y_0)$.

Зауваження. Можна навести твердження про зв'язок між поняттями неперервності і диференційовності функції двох змінних у точці, аналогічні до тих, що виконуються для функції однієї змінної.

Теорема 16. Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційовна в точці $(x_0; y_0)$, то вона неперервна в цій точці. Обернене твердження неправильне.

Диференціювання складеної функції. Інваріантність повного диференціала

Розглянемо функцію $z = f(x; y)$ двох змінних x та y, кожна з яких є функцією незалежної змінної t:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

тоді функція $f(x(t); y(t))$ є складеною функцією змінної t.

Теорема 17. Якщо функції $x = x(t), y = y(t)$ диференційовані в точці t, а функція $z = f(x;y)$ диференційована в точці $M(x;y)$, то складена функція $f(x(t);y(t))$ також диференційована в точці t і її похідну знаходять за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (4.5)$$

Так само знаходять похідну функції $u = f(x;y;z)$, $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \qquad (4.6)$$

Зокрема, якщо $t = x, y = y(x), z = z(x)$**,**то дістанемо формулу для обчислення ***повної похідної***

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \qquad (4.7)$$

Розглянемо загальний випадок. Нехай $z = f(x;y)$ – функція двох змінних x та y, які залежать від змінних u, v:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Тоді функція $f(x(u, v); y(u, v))$ є складеною функцією незалежних змінних u та v.

Якщо функції $x = x(u, v)$ та $y = y(u, v)$ диференційовані в точці $M_1(u;v)$, а функція $z = f(x;y)$ диференційована в точці $M_2(x(u;v);y(u;v))$, то складена функція $f(x(u, v);y(u, v))$ диференційована в точці $M_1(u;v)$ і її частинні похідні знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (4.8)$$

Знайдімо диференціал складеної функції:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Це доводить, що повний диференціал функції $z = f(x;y)$ має ***інваріантну (незмінну) форму***, тобто незалежну від того, чи є x та y незалежними змінними, чи диференційованими функціями змінних u та v.

Приклад 4.15. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = x^y, x = \ln t, y = \sin t$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \qquad \frac{dy}{dt} = \cos t.$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = yx^{y-1} \cdot \frac{1}{t} + x^y \ln x \cdot \cos t = \frac{\sin t}{t}(\ln t)^{\sin t - 1} + \cos t \cdot \ln\ln t \cdot (\ln t)^{\sin t}.$$

Приклад 4.16. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z=\left(\sqrt[3]{xy}\right)^2+\left(\sqrt[5]{\frac{x}{y}}\right)^3$.

Розв'язання. Маємо $z=u^2+v^3$, де $u=\sqrt[3]{xy}$, $v=\sqrt[5]{\frac{x}{y}}$.

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2u, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=3v^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt[3]{y}\,\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\sqrt[3]{x}\,\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt[5]{y}}\cdot\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{5}\sqrt[5]{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{y^6}}.$$

Таким чином, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{3}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}+\frac{3v^2}{5\sqrt[5]{x^4y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}-\frac{3v^2}{5}\sqrt[5]{\frac{x}{y^6}}$, або після підставляння виразів u і v дістанемо $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}+\frac{3}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{x^2y^3}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}-\frac{3}{5}\sqrt[5]{\frac{x^3}{y^8}}$.

Похідна неявної функції

Розглянемо рівняння

$$F(x;y)=0. \tag{4.9}$$

Якщо кожному значенню x з деякої множини D відповідає єдине значення y, яке разом з x задовольняє рівняння (4.9), то це рівняння задає на множині D неявну функцію $y=\varphi(x)$.

Теорема 18. Нехай функція $F(x;y)$ і її похідні $F'_x(x;y)$ та $F'_y(x;y)$ визначені та неперервні в якому-небудь околі точки $M_0(x_0;y_0)$ і $F(x_0;y_0)=0$, а $F'_y(x_0;y_0)\neq 0$. Тоді існує окіл точки M_0, в якому рівняння $F(x;y)=0$ визначає єдину неявну функцію $y=\varphi(x)$, неперервну і диференційовану в околі точки x_0 і таку, що $\varphi(x_0)=y_0$.

Знайдемо похідну неявної функції. Нехай ліва частина рівняння (4.9) задовольняє зазначені в теоремі умови, тоді це рівняння задає неявну функцію $y=y(x)$, для якої на деякій множині точок x має місце тотожність $F(x;y(x))\equiv 0$. Оскільки похідна функції, що тотожно дорівнює нулю, також дорівнює нулю, то повна похідна $\frac{dF}{dx}=0$. За формулою (4.7) маємо $\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$, тому $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{4.10}$$

Розглянемо рівняння

$$F(x;y;z)=0. \tag{4.11}$$

Якщо кожній парі чисел x та y з деякої множини відповідає єдине значення z, яке разом з x та y справджує рівняння (4.11), то це рівняння задає неявну функцію $z=\varphi(x;y)$.

Справджується така теорема існування.

Теорема 19. Нехай функція $F(x;y;z)$ і її похідні $F_x'(x;y;z)$, $F_y'(x;y;z)$ та $F_z'(x;y;z)$ визначені і неперервні в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і $F(x_0;y_0;z_0)=0$, а $F_z'(x_0;y_0;z_0)\neq 0$. Тоді існує окіл точки M_0, в якому рівняння $F(x;y;z)=0$ визначає єдину неявну функцію $z=\varphi(x;y)$, неперервну і диференційовану в околі точки $(x_0;y_0)$ і таку, що $\varphi(x_0;y_0)=z_0$.

Знайдемо частинні похідні z_x' і z_y' неявної функції z від x та y, заданої рівнянням (4.11).

Коли визначаємо z_x' (або z_y'), то змінну y (або x) вважаємо сталою, тому за формулою (4.10) маємо

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'},$$

за умови, що $F_Z'\neq 0$.

Приклад 4.17. Знайти похідну від неявної функції $y^5+2x^2y^2+xy-42=0$ в точці $x=1$, $y=2$.

Розв'язання. Маємо $F_x'=4xy^2+y$, $F_y'=5y^4+4x^2y+x$, звідки

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4xy^2+y}{5y^4+4x^2y+x}.$$

Для $x=1$, $y=2$ маємо $\frac{dy}{dx}=-\frac{18}{89}$.

Приклад 4.18. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z^3-3xyz=5$.

Розв'язання.

$F(x,y,z)=z^3-3xyz-5$.

Знайдемо $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-3yz, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=-3xz, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy}.$$

Частинні похідні і диференціали вищих порядків

Нехай функція $z=f(x;y)$ має частинні похідні в усіх точках множини D. Візьмемо будь-яку точку $(x;y)\in D$; у цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, які залежать від x і y, тобто вони є функції двох змінних. Отже, можна ставити питання про знаходження їхніх частинних похідних. Якщо вони існують, то називаються *похідними другого порядку* і позначаються так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{yx}.$$

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків, наприклад:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2}.$$

Теорема 20. Якщо функція $z = f(x;\ y)$ визначена в області D і в цій області існують перші похідні f'_x та f'_y, а також другі мішані похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які неперервні в точці $(x_0; y_0) \in D$, то в цій точці $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Така сама теорема правдива для будь-яких неперервних мішаних похідних, що відрізняються між собою лише порядком диференціювання.

Означення. *Диференціалом другого порядку* від функції $z = f(x; y)$ називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто $d^2 z = d(dz)$.

$$d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

Отже,

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків

$$d^3 z = d\left(d^2 z\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z.$$

. . . .

$$d^n z = d\left(d^{n-1} z\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Приклад 4.19. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ для функції $z = x^2 y^3$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 y^3\right)'_x = 2xy^3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(2xy^3\right)'_y = 6xy^2, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \left(6xy^2\right)'_y = 12xy.$$

Приклад 4.20. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = \sin(x^2 + y^2)$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2 + y^2\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2 + y^2\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

Отже, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Приклад 4.21. Знайти $d^2 z$, якщо $z = \sin x \cdot \sin y$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого та другого порядків.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y,$$

$$d^2 z = -\sin x \sin y dx^2 + 2\cos x \cos y\, dx\, dy - \sin x \sin y dy^2.$$

Формула Тейлора для функції двох змінних

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x; y)$. Припустимо, що в околі деякої заданої точки $(x_0; y_0)$ ця функція має неперервні похідні всіх порядків до $n+1$ включно. Надамо x_0 і y_0 деяких приростів Δx і Δy так, щоб прямолінійний відрізок, який сполучає точки $(x_0; y_0)$ і $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$, не вийшов за межі околу, що розглядається. Тоді

$$\Delta f(x_0; y_0) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = df(x_0; y_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0; y_0) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!} d^n f(x_0; y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \Theta\Delta x; y_0 + \Theta\Delta y) \left(0 < \Theta < 1\right),$$

або в розгорнутому вигляді

$$\Delta f(x_0; y_0) = [\, f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y] +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[f''_{x^2}(x_0; y_0)(\Delta x)^2 + 2 f''_{xy}(x_0; y_0)\Delta x \Delta y + f''_{y^2}(x_0; y_0)(\Delta y)^2\right] +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[f'''_{x^3}(x_0; y_0)(\Delta x)^3 + 3 f'''_{x^2 y}(x_0; y_0)(\Delta x)^2 y + 3 f'''_{xy^2}(x_0; y_0)\Delta x(\Delta y)^2 +\right.$$
$$\left. + f'''_{y^3}(x_0; y_0)(\Delta y)^3\right] + \ldots + O\left(\rho^n\right),$$

де $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Це *формула Тейлора для функції двох незалежних змінних*.