4.3. Деякі застосування частинних похідних

Дотична площина та нормаль

Якщо функція $z = f(x;\ y)$ диференційовна в точці $(x_0;\ y_0)$, то виконується рівність

$$\Delta z \approx A\Delta x + B\Delta y,$$

або

$$f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) \approx f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y.$$

Узявши в цій наближеній рівності $a = x_0 + \Delta x$, $b = y_0 + \Delta y$, дістанемо:

$$f(a;b) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)(a - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(b - y_0). \qquad (4.12)$$

На формулі (4.12) ґрунтується *алгоритм використання диференціала для наближених обчислень*.

Крім того, якщо в рівності (4.12) взяти $a = x$, $b = y$, дістанемо

$$z = f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + f'_y(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0). \qquad (4.13)$$

Це рівняння ***дотичної площини***, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

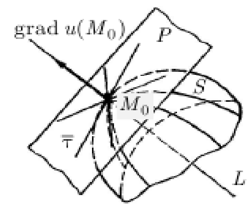


Рис. 4.19

Дотичною площиною до поверхні S у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ називають площину P, у якій розташовані дотичні до все можливих кривих, які проведені на S через $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Якщо поверхню задано у просторі рівнянням $F(x; y; z) = 0$, то рівняння дотичної площини до поверхні $F(x; y; z) = 0$ в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

де $A = F'_x(x_0; y_0; z_0)$, $B = F'_y(x_0; y_0; z_0)$, $C = F'_z(x_0; y_0; z_0)$.

Отже,

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0. \qquad (4.14)$$

Нормаль до поверхні в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — це пряма L, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і перпендикулярна до дотичної площини P. Отже, її рівняння

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (4.15)$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z = f(x;\ y)$ маємо

– рівняння дотичної площини

$$z'_x(M_0)(x - x_0) + z'_y(M_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0; \qquad (4.16)$$

– рівняння нормалі

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} \qquad (4.17)$$

Приклад 4.22. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ у точці $M_0(1; 2; -1)$.

Розв'язання.

Записуємо рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні.

$$F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0;$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Обчислюємо частинні похідні функції у заданій точці $F=x^3+y^3+z^3+xyz-6$.

$$F'_x=\left(x^3+y^3+z^3+xyz-6\right)'_x=\left(3x^2+yz\right)\Big|_{(1;\,2;\,-1)}=1;$$

$$F'_y=\left(x^3+y^3+z^3+xyz-6\right)'_y=\left(3y^2+xz\right)\Big|_{(1;\,2;\,-1)}=11;$$

$$F'_z=\left(x^3+y^3+z^3+xyz-6\right)'_z=\left(3z^2+xy\right)\Big|_{(1;\,2;\,-1)}=5.$$

Рівняння дотичної площини:

$$1(x-1)+11(y-2)+5(z+1)=0;$$

$$x-1+11y-22+5z+5=0;$$

$$x+11y+5z-18=0.$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}.$$

Похідна за напрямом. Градієнт

Означення. Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0;y_0)$; l — деякий промінь з початком у точці $P_0(x_0;y_0)$; $P(x;y)$ — точка на цьому промені, яка належить околу, що розглядається (рис. 4.20); Δl — довжина відрізка P_0P. Границя $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{f(P)-f(P_0)}{\Delta l}$, якщо вона існує, називається *похідною функції* $z=f(x;y)$ *за напрямом* $\vec{l}$ *у точці* P_0 і позначається $\frac{\partial z}{\partial l}$.

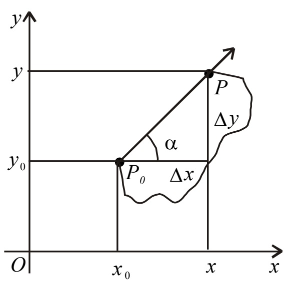


Рис. 4.20

Зокрема, $\frac{\partial z}{\partial x}$ є похідна функції $z=f(x;y)$ за додатним напрямом осі Ox, а $\frac{\partial z}{\partial y}$ — похідна функції $z=f(x;y)$ за додатним напрямом осі Oy.

Похідна за напрямом $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ *характеризує швидкість змінювання функції* $z=f(x;y)$ у точці $P_0(x_0;y_0)$ за напрямом $\vec{l}$.

Теорема 21. Якщо функція $z=f(x;y)$ має в точці $P_0(x_0;y_0)$ неперервні частинні похідні, тоді в цій точці існує похідна $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ за будь-яким напрямом $\vec{l}=(\cos\alpha;\ \cos\beta)$, причому

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}\cos\beta\,, \qquad (4.18)$$

де $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}$ і $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}$ — значення частинних похідних функції $z=f(x;y)$ у точці $P_0(x_0;y_0)$.

Приклад 4.23. Знайти похідну функції $u=x^2+y^2$ у точці $(1;1)$ за напрямом $\vec{l}=(\cos 30^{\circ};\cos 60^{\circ})$.

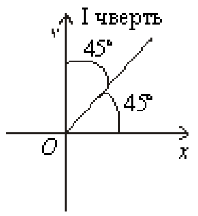
Розв'язання. Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці $(1;1)$ функції $u=x^2+y^2$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1;1)}=\left.2x\right|_{(1;1)}=2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1;1)}=\left.2y\right|_{(1;1)}=2.$$

Тоді за формулою похідної за напрямом (4.18) дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}=2\cos 30^{\circ}+2\cos 60^{\circ}=1+\sqrt{3}\,.$$

Приклад 4.24. Знайти похідну функції $z=\operatorname{arctg} xy$ у точці $(1;1)$ за напрямом бісектриси першого координатного кута.



Розв'язання. Знайдемо значення z'_x, z'_y у точці $(1;1)$:

$$\left.z'_x\right|_{(1;1)}=\left.\frac{y}{1+x^2y^2}\right|_{(1;1)}\frac{1}{2}; \qquad \left.z'_y\right|_{(1;1)}=\left.\frac{y}{1+x^2y^2}\right|_{(1;1)}=\frac{1}{2}.$$

Отже, $\dfrac{\partial z}{\partial l}=\dfrac{1}{2}\cos 45^{\circ}+\dfrac{1}{2}\cos 45^{\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Означення. Вектор з координатами $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x};\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, який характеризує напрям максимального зростання функції $z=f(x;y)$ у точці $P_0(x_0;y_0)$, називається *градієнтом функції* $z=f(x;y)$ у цій точці і позначається $\overrightarrow{\text{grad}}\ z$ ($\vec{i},\vec{j}$ — одиничні орти):

$$\overrightarrow{grad}\ z=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}\vec{i}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}\vec{j}. \qquad (4.19)$$

Аналогічно для функції трьох змінних $u=u(x;y;z)$ похідна за напрямом $\vec{l}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ подається у вигляді:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\cos\gamma. \qquad (4.20)$$

Для функції трьох змінних $u=u(x;\ y;\ z)$ градієнт у точці $P_0(x_0;y_0;z_0)$ визначається так:

$$\overrightarrow{grad}\ u=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}\vec{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}\vec{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\vec{k}, \qquad (4.21)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні орти і $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}$ обчислені в точці $P_0(x_0; y_0; z_0)$.

Похідна функції $z=f(x;y)$ в точці $P_0(x_0;y_0)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ дорівнює проекції градієнта функції в цій точці на вектор $\vec{l}$, тобто похідна функції за напрямом вектора $\vec{l}$ та градієнт пов'язані співвідношенням

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}=np_{\vec{l}}\,grad\ z\,.$$

Похідна в даній точці за напрямом вектора $\vec{l}$ має найбільше значення, якщо напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта, причому

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right)_{\max}=\left|grad\ z\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,.$$

Справді, з останньої формули випливає, що похідна за напрямом досягає максимального значення, якщо $\cos\varphi=1,\ \varphi=0$, тобто якщо напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта.

Таким чином, *швидкість зростання скалярного поля в довільній точці є максимальною у напрямі градієнта*. Зрозуміло, що у напрямі, протилежному до напряму градієнта, поле найшвидше зменшуватиметься.

Приклад 4.25. Знайти градієнт функції $u=4-x^2-2y^2-xy+z^2y^2$ у точці $(1;2;-1)$.

Розв'язання. Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці $(1;2;-1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1;2;-1)}=\left.(-2x-y)\right|_{(1;2;-1)}=-4, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1;2;-1)}=\left.\left(-4y-x+2z^2y\right)\right|_{(1;2;-1)}=-2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1;2;-1)}=2zy^2{}_{(1;2;-1)}=-8\,.$$

Тоді $\overrightarrow{\text{grad}}\ u=-4\vec{i}-2\vec{j}-8\vec{k}$.

Приклад 4.26. Знайти точки, в яких модуль градієнта функції $z=\left(x^2+y^2\right)^{3/2}$ дорівнює 2.

Розв'язання. Знайдемо z'_x і z'_y:

$$z'_x=\frac{3}{2}\cdot 2x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}=3x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad z'_y=\frac{3}{2}\cdot 2y\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}=3y\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Модуль градієнта дорівнює 2 в деякій точці $(x_0;y_0)$:

$$\left|\text{grad}\ z\right|=2=\sqrt{9x_0^2\left(x_0^2+y_0^2\right)+9y_0^2\left(x_0^2+y_0^2\right)}=\sqrt{9\left(x_0^2+y_0^2\right)\left(x_0^2+y_0^2\right)}=\sqrt{9\left(x_0^2+y_0^2\right)^2}=3\left(x_0^2+y_0^2\right).$$

Отже, $x_0^2+y_0^2=\frac{3}{2}$, тобто в точках кола з центром у точці $(0;0)$ і радіусом $\sqrt{\frac{3}{2}}$ модуль градієнта заданої функції дорівнює 2.

Екстремум функції двох змінних

Означення. Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0;y_0)$ і неперервна в цій точці. Якщо для всіх точок $(x;y)$ цього околу виконується нерівність $f(x;y) \le f(x_0;y_0)$ $[f(x;y) \ge f(x_0;y_0)]$, тоді ця точка (x_0,y_0) називається *точкою максимуму* (*мінімуму*) функції $z = f(x;\ y)$ (рис.4.21).

Точки максимуму й мінімуму називаються *точками екстремуму*.

Якщо покласти

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y,$$

то повний приріст функції

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x;y) - f(x_0;y_0) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0).$$

Якщо приріст функції зберігає знак в околі точки M_0, то в цій точці функція зберігає локальний екстремум:

1) максимум, якщо $\Delta f(x_0,y_0) < 0$;

2) мінімум, якщо $\Delta f(x_0,y_0) > 0$.

Теорема 22 (необхідна умова екстремуму). Якщо функція $z = f(x;y)$ має екстремум у точці (x_0,y_0), тоді в цій точці частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ або дорівнюють нулю, або хоча б одна з них не існує.

Означення. Точку $(x_0;y_0)$, в якій частинні похідні першого порядку функції $f(x;y)$ дорівнюють нулю, тобто $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, називають *стаціонарною точкою функції* $f(x;y)$.

Означення. Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні не існують, називаються *критичними точками.*

Приміром, дослідимо функцію $f(x;y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис.4.22).

Функція $f(x;y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ має максимум у точці $(0;0)$, оскільки $f(0;0) = 1$, $f(x;y) < 1$, якщо $x^2 + y^2 > 0$.

Частинні похідні функції $f(x;y)$

$$f'_x(x;y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f'_y(x;y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

у точці $(0;0)$ не існують.

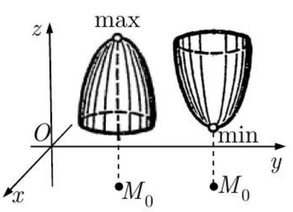


Рис. 4. 21

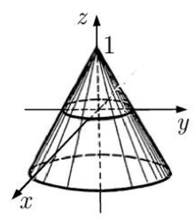


Рис. 4. 22

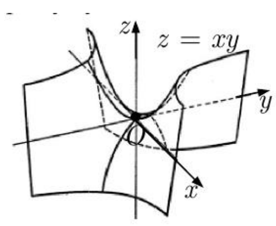


Рис. 4. 23

Проте не всяка критична точка є точкою екстремуму, тобто теорема 22 встановлює лише необхідну, але не достатню умови екстремуму.

Приміром, дослідимо функцію $z = xy$ (рис.4.23).

Частинні похідні функції $z = xy$ дорівнюють нулеві в точці $(0;0)$. Але ця функція у вказаній точці екстремуму не має, тому що в досить малому околі точки $(0;0)$ вона набуває як додатних, так і від'ємних значень. Графіком функції $z = xy$ є гіперболічний параболоїд.

Нехай функція $z = f(x;y)$ двічі диференційована в околі точки $M_0(x_0;y_0)$. Якщо точка M_0 є точкою локального екстремуму, то

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad df(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}dy = 0.$$

Запишемо Тейлорову формулу 1-го порядку для функції f:

$$\Delta f(M_0) = df(M_0) - \frac{d^2 f(M')}{2!} = |df(M_0) = 0| = \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(M')\Delta x^2 + 2f''_{xy}(M')\Delta x\Delta y + f''_{yy}(M')\Delta y^2\right).$$

Отже, знак приросту функції $\Delta f(M_0)$ визначається знаком 2-го диференціала $d^2 f$.

Другий диференціала функції $z = f(x;y)$ є квадратичною формою $Q(dx, dy)$ щодо змінних dx і dy, яку можна записати як

$$d^2 z = (dx \quad dy)\, H \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

де $H = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix}$ – матриця квадратичної форми, яку називають матрицею Гессе.

Визначник матриці Гессе $\det H$ називають гессіаном.

Отже, $d^2 f(M_0) > 0$ $\left(d^2 f(M_0) < 0\right)$ тоді й лише тоді, коли матриця Гессе є додатно (від'ємно) визначеною.

Згідно з критерієм Сильвестра матриця H є:

1) додатно визначеною, якщо $z''_{xx}(M_0) > 0$, $\det H(M_0) > 0$;

2) від'ємно визначеною, якщо $z''_{xx}(M_0) < 0$, $\det H(M_0) < 0$.

Теорема 23 (достатня умова екстремуму). Нехай функція $z = f(x;y)$ має екстремум у стаціонарній точці $M_0(x_0;y_0)$ неперервні частинні похідні першого й другого порядку, причому $f'_x(x_0;y_0) = 0$ та $f'_y(x_0;y_0) = 0$, а також $f''_{xx}(x_0;y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0;y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0;y_0) = C$. Якщо:

1) $\Delta = AC - B^2 > 0$ і $A < 0$, тоді $M_0(x_0;y_0)$ точка максимуму функції $z = f(x;y)$;

2) $\Delta = AC - B^2 > 0$ і $A > 0$, тоді $M_0(x_0;y_0)$ точка мінімуму функції $z = f(x;y)$;

3) $\Delta = AC - B^2 < 0$, тоді в точці $M_0(x_0;y_0)$ немає екстремуму.

4) $\Delta = AC - B^2 = 0$, тоді потрібні додаткові дослідження.

Алгоритм дослідження функції $z = f(x;y)$ на екстремум:

1. Знайти перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Знайти стаціонарні точки, тобто точки, в яких $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. Обчислити значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках.

5. Для кожної стаціонарної точки знайти $\Delta = AC - B^2$ і зробити висновки на базі теореми 23.

Приклад 4.27. Розглянемо функцію $f(x;y) = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$.

Розв'язання.

1. Знайдемо $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 8 - 4y$.

2. Необхідна умова існування екстремуму полягає в тому, що $\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 8 - 4y = 0 \end{cases}$.

Розв'язком цієї системи є точка з координатами $x = 1$, $y = 2$.
Таким чином, у точці $(1;2)$ функція може мати екстремум.

3. Знайдемо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 = A$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4 = C$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = B$, звідки дістаємо, що $\Delta = AC - B^2 = (-2)\cdot(-4) - 0^2 = 8$.

4. Як випливає з пункту 5 алгоритму знаходження екстремуму — екстремум у точці $(1;2)$ існує. Це максимум, бо $A = -2 < 0$.

Приклад 4.28. Дослідити на екстремум функцію двох змінних: $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Розв'язання.

1. Знайдемо z'_x і z'_y: $z'_x = \frac{x}{a}$, $z'_y = \frac{y}{b}$.

2. Необхідна умова екстремуму: $\begin{cases} \frac{x}{a} = 0, \\ \frac{y}{b} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$.

Отже, $(0;0)$ — стаціонарна точка.

3. Знайдемо z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}: $z''_{xx} = \frac{1}{a}$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = \frac{1}{b}$.

4. У точці $(0;0)$ $A = \frac{1}{a}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{b}$. $\Delta = AC - B^2 = \frac{1}{ab} > 0$.

5. Точка $(0;0)$ — мінімум, хоча це ясно і безпосередньо.

Знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції на замкненій обмеженій множині

Як випливає з теореми 11, функція, що неперервна на замкненій обмеженій множині D, досягає на ній найбільшого та найменшого значень. Цих значень вона може набувати як у внутрішніх точках множини D (кожна така точка є точкою екстремуму функції, у цій точці перші частинні похідні дорівнюють нулю або не існують), так і на її межі, тобто необхідне спеціальне дослідження межових точок множини D.

Приклад 4.29. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області, обмеженій прямими $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 3 - x$ (рис. 4.24).

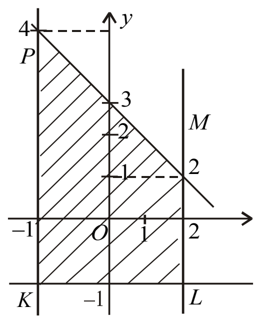


Рис. 4.24

Розв'язання.

1. Дослідимо поводження функції всередині області *KLMP*. Знайдемо перші частинні похідні функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$. Прирівняємо їх до нуля.

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ \left(x^2\right)^2 - x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = 1; \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = 1, \\ y_2 = 1. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Отримаємо стаціонарні точки $O(0;0)$ та $E(1;1)$.

2. Дослідимо поводження функції на межі області.

Відрізок *KL* має рівняння $y = -1$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = x^3 - 1 + 3x$. Треба знайти найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $[-1;\ 2]$.

Маємо $z' = 3x^2 + 3 > 0$, отже, функція зростає і тому досягає найбільшого значення на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;-1)$ і $L(2;-1)$.

Відрізок *LM* має рівняння $x = 2$, $-1 \le y \le 1$. Підставивши $x = 2$ у задану функцію, дістанемо функцію z як функцію від змінної *y*: $z = 8 + y^3 - 6y$. Маємо $z' = 3y^2 - 6 < 0$ на відрізку $[-1;1]$.

Отже, функція $z = 8 + y^3 - 6y$ досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $L(2;-1)$ і $M(2;1)$.

Відрізок *PM* має рівняння $y = 3 - x$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = 3 - x$ у задану функцію, дістанемо функцію z як функцію від змінної *x*: $z = x^3 + (3 - x)^3 - 3x(x - 3)$, тобто $z = 27 - 36x + 12x^2$. Маємо $z' = 24x - 36$, звідки $z' = 0$ при $x = \frac{3}{2}$. Отже, на відрізку *PM* функція може досягати найбільшого та найменшого значень у точках $M(2;1)$, $P(-1;4)$ та $T\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Відрізок *KP* має рівняння $x = -1$, $-1 \le y \le 4$. Підставивши $x = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = -1 + y^3 + 3y$. Маємо $z' = 3y^2 + 3 > 0$, отже, функція досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;-1)$, $P(-1;4)$.

Таким чином, функція $z = x^3 + y^2 - 3xy$ може досягти найбільшого та найменшого значень тільки в таких точках: $O(0;0)$, $E(1;1)$, $K(-1;-1)$, $L(2;-1)$, $M(2;1)$, $P(-1;4)$, $T\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Знаходимо $f(0;0)=0$, $f(1;1)=-1$, $f(-1;-1)=-5$, $f(2;-1)=13$, $f(2;1)=3$, $f(-1;4)=75$, $f\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)=0$.

Отже, $z_{\min}=-5$, і це значення досягається в точці $(-1;-1)$, $z_{\max}=75$, і це значення досягається в точці $(-1;4)$.

Умовний екстремум для функції двох змінних

Нехай на відкритій множині $D\subset R^2$ задано функції $u=f(x;y)$, $v=\varphi(x;y)$ і E — множина точок, що задовольняють рівняння

$$\varphi(x;y)=0 \tag{4.22}$$

Означення. Рівняння (4.22) називають *рівнянням зв'язку*. Точку $(x_0;y_0)\in E$ називають *точкою умовного строгого максимуму* функції $u=f(x;y)$ відносно рівняння зв'язку (4.22), якщо існує такий окіл точки $(x_0;y_0)$, для всіх точок якого $(x;y)\neq(x_0;y_0)$, що задовольняють рівняння зв'язку, справджується нерівність $f(x;y)<f(x_0;y_0)$.

Якщо за таких умов виконується $f(x;y)>f(x_0;y_0)$, тоді точку $(x_0;y_0)$ називають *точкою умовного строгого мінімуму* функції $u=f(x;y)$ при обмеженнях (4.22).

Аналогічно вводяться поняття нестрогого умовного екстремуму.

Точки умовного максимуму та мінімуму називають точками *умовного екстремуму*. Умовний екстремум інколи називають *відносним екстремумом*.

Метод Лагранжа знаходження точок умовного екстремуму

Нехай функції $u=f(x;y)$ та $v=\varphi(x;y)$ неперервно диференційовні в околі $(x_0;y_0)$ і ранг *матриці Якобі* $\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y}\end{pmatrix}$ дорівнює 1 у точках, що задовольняють рівняння зв'язку.

Означення. Функцію $L(x;y)=f(x;y)+\lambda\varphi(x;y)$ називають *функцією Лагранжа*, параметр λ — *множником Лагранжа*.

Теорема 24. *(Необхідна умова існування умовного екстремуму.)* Для того щоб точка $(x_0;y_0)$ була точкою умовного екстремуму функції $u=f(x;y)$ при рівнянні зв'язку $\varphi(x;y)=0$, необхідно, щоб її координати при деяких значеннях λ задовольняли систему рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(x;y)}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial L(x;y)}{\partial y}=0,\\ \varphi(x;y)=0.\end{cases}$$

Ці умови означають, що точка (x_0,y_0) є стаціонарною точкою функції Лагранжа і її координати задовольняють рівняння зв'язку.

Теорема 25. *(Достатня умова умовного екстремуму.)* Нехай функції $u = f(x;y)$, $v = \varphi(x;y)$ подвійно неперервно диференційовні в околі точки $(x_0;y_0)$ і нехай у цій точці виконуються необхідні умови існування екстремуму функції $f(x;y)$ при обмеженні $\varphi(x;y) = 0$. Тоді якщо за умови

$$d\varphi(x_0,y_0) = \frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y}dy = 0, \qquad dx^2 + dy^2 > 0 \qquad (4.23)$$

другий диференціал $d^2L(x_0;y_0)$ функції Лагранжа є додатно (від'ємно) визначеною квадратичною формою, то функція $u = f(x;y)$ у точці $(x_0;y_0)$ має умовний строгий мінімум (максимум).

Якщо за умов (4.23) другий диференціал $d^2L(x_0;y_0)$ є невизначеною квадратичною формою, то в точці $(x_0;y_0)$ умовного екстремуму немає.

Приклад 4.30. Знайти умовний екстремум функції $u = f(x;y) = 6 - 5x - 4y$ відносно рівняння зв'язку $\varphi(x;y) = x^2 - y^2 - 9 = 0$.

Розв'язання.

Функції f і φ подвійно неперервно диференційовні. Матриця Якобі в даному випадку має вигляд $(2x \;\; -2y)$, і її ранг дорівнює 1 в усіх точках, що задовольняють рівняння зв'язку. Отже, можна скористатися методом Лагранжа. Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x;y) = 6 - 5x - 4y + \lambda(x^2 - y^2 - 9).$$

Згідно з необхідними умовами дістанемо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -5 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 - y^2 - 9 = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо $x = -5$, $y = 4$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$; $x = 5$, $y = -4$ при $\lambda = \frac{1}{2}$. Таким чином, функція f може мати умовний екстремум тільки в двох точках $(-5;4)$ і $(5;-4)$.

Обчислимо другий диференціал функції Лагранжа: $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda$, тоді $d^2L = 2\lambda(dx^2 - 2y^2)$.

Знайдемо перший диференціал функції $\varphi(x;y)$.

У точках $(-5;4)$ і $(5;-4)$ диференціали dx і dy пов'язані рівністю: $5dx + 4dy = 0$, $dy = -\frac{5}{4}dx$. При виконанні цієї умови другий диференціал функції Лагранжа в точці $(-5;4)$ є додатно визначеною квадратичною формою $d^2L = \frac{9}{16}dx^2$, а в точці $(5;-4)$ — від'ємно визначеною формою $d^2L = -\frac{9}{16}dx^2$.

Отже, функція f у точці $(-5;4)$ має умовний мінімум $u(-5;4) = 15$, а в точці $(5;-4)$ — умовний максимум $u(5;-4) = -3$.