4.4 Диференціальні рівняння першого порядку

4.4.1 Основні поняття

Означення. *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, що зв'язує незалежну змінну, шукану функцію та її похідні:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Означення. Найвищий порядок похідної, яка входить у диференціальне рівняння називається *порядком рівняння*.

У цьому розділі будемо розглядати лише диференціальні рівняння, в яких шукана функція залежить лише від одного аргументу. Такі рівняння називаються *звичайними*.

Розглянемо диференціальне рівняння 1-го порядку

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \tag{4.24}$$

Диференціальне рівняння (4.24), нерозв'язне відносно похідної y', називають *неявним диференціальним рівнянням*. Якщо рівняння (4.24) можна розв'язати відносно похідної, то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y) \tag{4.25}$$

і називають рівнянням першого порядку, *розв'язаним відносно похідної*. Рівняння (4.25) можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad dy = f(x, y)dx \quad \Leftrightarrow \quad dy - f(x, y)dx = 0\,.$$

Якщо $f(x;y)$ є дробом, $f(x;y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, тоді диференціальне рівняння першого порядку можна записати в *симетричній формі*

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0\,,$$

де $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – відомі функції.

Означення. *Розв'язком диференціального рівняння* $y' = f(x, y)$ називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці у диференціальне рівняння перетворює його на тотожність. Графік функції $y = \varphi(x)$ називається *інтегральною кривою*.

Зауважимо, що множина розв'язків диференціального рівняння зазвичай нескінченна.

Наприклад, диференціальне рівняння

$$y' = 2x$$

має розв'язком будь-яку функцію $y = x^2 + C$, де C — довільна стала.

Геометричний зміст диференціального рівняння

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y),$$

де функція $f(x, y)$ означена і неперервна в області D змінних x та y. Нехай $y = \varphi(x)$ є розв'язком цього рівняння в інтервалі $(a;b)$.

Оскільки функція $\varphi(x)$ має в кожній точці інтервалу $(a;b)$ похідну, то графік функції $y = \varphi(x)$ має в кожній своїй точці дотичну, з кутом нахилу α. В кожній точці $M(x, y)$ інтегральної кривої виконано співвідношення

$$tg\alpha = f(x, y).$$

Отже, *диференціальне рівняння* $y' = f(x, y)$ *виражає залежність між координатами кожної точки* M *інтегральної кривої і кутовим коефіцієнтом її дотичної в точці* M.

Рівність $tg\alpha = f(x, y)$ у кожній точці $M(x, y)$ визначає одиничний вектор

$$\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha .$$

Множина таких векторів утворює *поле напрямків* диференціального рівняння (рис. 25).

Будь-яка інтегральна крива (графік розв'язку диференціального рівняння) має властивість: *напрям її дотичної в певній точці збігається з напрямом поля у цій точці*.

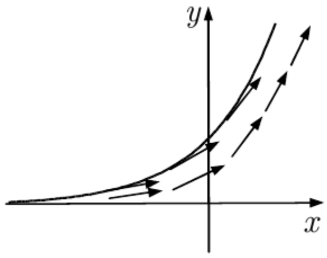

Рис. 4.25

Частинний і загальний розв'язок диференціального рівняння

Означення. Розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння

$$y' = f(x, y),$$

що задовольняє *початкову умову*

$$y(x_0) = y_0$$

називають *частинним розв'язком* диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову.

Означення. Частинний розв'язок, який заданий неявно співвідношенням

$$\Phi(x, y) = 0,$$

називають *частинним інтегралом*.

Геометрично початкова умова означає, що задають точку $M_0(x_0, y_0)$, через яку повинна проходити шукана інтегральна крива.

Означення. Сукупність функцій

$$y = y(x, C),$$

де C – довільна стала, називають *загальним розв'язком* диференціального рівняння

$$y' = f(x, y)$$

якщо:

1) функція $y = y(x, C)$ є розв'язком цього диференціального рівняння для будь-якого значення C;

2) для будь-якої початкової умови $y(x_0) = y_0$ існує єдине значення $C = C_0$ таке, що функція $y = y(x, C_0)$ задовольняє цю початкову умову.

Загальний розв'язок, який заданий неявно співвідношенням

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння.

Геометрично загальний розв'язок є сукупністю інтегральних кривих, залежних від одного параметра. Частинний розв'язок є однією з кривих цієї сукупності, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис 4.26).

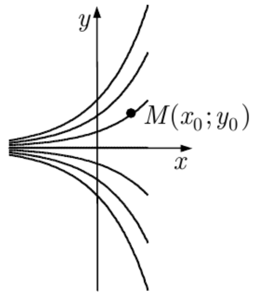

Рис. 4.26

Задача Коші для диференціального рівняння 1-го порядку

Означення. Задача відшукання частинного розв'язку диференціального рівняння

$$y' = f(x, y),$$

який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0$$

називається *задачею Коші (початковою задачею)* для диференціального рівняння.

Теорема 26 (існування та єдиності розв'язку задачі Коші). Якщо в диференціальному рівнянні

$$y' = f(x, y)$$

функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $f'_y(x)$ неперервні в деякій області D, яка містить точку $M_0(x_0, y_0)$, то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, який справджує початкову умову

$$y_0 = \varphi(x_0).$$

Геометрично це означає, що через точку $M_0(x_0, y_0)$ проходить одна і лише одна інтегральна крива рівняння.

Зауваження. Теорема 26 має локальний характер: вона гарантує існування єдиного розв'язку диференціального рівняння лише в досить малому околі точки x_0.

Означення. Розв'язок $y = \Psi(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ називають *особливим*, якщо в кожній його точці порушується властивість єдності, тобто через кожну його точку $(x_0; y_0)$ крім цього розв'язку проходить і інший розв'язок рівняння, відмінний від $y = \Psi(x)$ у як завгодно малому околі точки $(x_0; y_0)$.

4.4.2 Розв'язання диференціальних рівнянь 1-го порядку

Диференціальне рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (4.26)$$

називається *диференціальним рівнянням* з *відокремленими змінними*. Тут $M(x, y)$, $N(x, y)$ – відомі неперервні функції.

Інтегруючи обидві частини рівняння (4.26), одержимо загальний розв'язок:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C,$$

де C – довільна стала.

Приклад 4.31. Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння $2xdx + 2ydy = 0.$

Розв'язання.

Проінтегруємо диференціальне рівняння

$$\int 2xdx + \int 2ydy = C, \qquad x^2 + y^2 = C, \quad C = \text{const}$$

Інтегральними кривими диференціального рівняння для $C \geq 0$ є концентричні кола з центром у початку координат радіусом $\sqrt{C}$.

Означення. Диференціальне рівняння виду

$$N_1(y)M_1(x)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \tag{4.27}$$

у якому коефіцієнти при диференціалах розкладаються на множники, що залежать лише від x і лише від y, називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*, оскільки ділячи обидві частини рівняння на $N_1(y)\,M_2(x) \neq 0$ в ньому можемо відокремити змінні:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Ділення на $N_1(y)\,M_2(x)$ можна призвести до втрати розв'язків вигляду

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

де $N_1(\beta) = 0, \; M_2(\alpha) = 0$.

Диференціальне рівняння виду

$$y' = f_1(x)f_2(y) \tag{4.28}$$

є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Рівняння (4.28) можна записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y), \qquad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Рівняння (4.28) має розв'язок виду $y = y_k$, де $f_2(y_k) = 0.$

Приклад 4.32. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y' = 2xy^2.$

Розв'язання.

Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2, \qquad \frac{dy}{y^2} = 2xdx, \qquad \int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx,$$

або

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C, \qquad y = -\frac{1}{x^2 + C}.$$

Деякі рівняння за допомогою заміни змінної можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними. Наприклад, рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c),$$

де $f(z)$ – неперервна функція, $a, b, c = const$, підстановкою

$$z = ax + by + c$$

перетворюється на диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 4.33. Розв'язати рівняння $y' = (x+y)^2$.

Розв'язання.

Покладемо $z = x + y$, тоді диференціюючи останню рівність по x, дістанемо $\dfrac{dz}{dx} = 1 + \dfrac{dy}{dx}$.

Враховуючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx} = z^2$, маємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + z^2, \qquad dz = \left(1 + z^2\right)dx, \qquad \frac{dz}{1+z^2} = dx.$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx, \qquad arctg\ z = x + C, \qquad arctg(x+y) = x + C.$$

Інших розв'язків це рівняння не має, бо $1 + z^2 \neq 0$.

Однорідні диференціальні рівняння

Означення. Диференціальне рівняння 1-го порядку називається *однорідним*, якщо його можна подати у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{4.29}$$

Рівняння (4.29) за допомогою заміни змінної $\dfrac{y}{x} = u$ зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y = ux, \qquad y' = u'x + x, \qquad u = u(x),$$

$$u'x + u = f(u), \qquad x\frac{du}{dx} = f(u) - u, \qquad \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x},$$

проінтегрувавши, знайдемо

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|x| + C.$$

Підставимо після інтегрування замість u відношення $\dfrac{y}{x}$ і дістанемо інтеграл рівняння (4.29).

Приклад 4.34. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{y}{x}$.

Розв'язання. Узявши $y = ux$, дістанемо диференціальне рівняння і його загальний розв'язок

$$u'x + u = u, \qquad u'x = 0, \qquad u = C, \qquad y = Cx.$$

Приклад 4.35. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{y^2}{x^2}$.

Розв'язання. Візьмемо $y = ux$ і одержимо диференціальне рівняння

$$u'x + u = u^2, \qquad x\frac{du}{dx} = u^2 - u, \qquad \frac{du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи диференціальне рівняння з відокремленими змінними, знаходимо загальний розв'язок:

$$\int \frac{du}{u^2 - u} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln x + \ln C, \qquad \frac{u-1}{u} = Cx,$$

$$u = \frac{1}{1 - Cx}, \qquad \frac{y}{x} = \frac{1}{1 - Cx}, \qquad y = \frac{x}{1 - Cx}.$$

Однорідне диференціальне рівняння $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ не змінюється при перетворенні подібності:

$$y = ky_1, \quad x = kx_1, \quad k = \text{const}. \tag{4.30}$$

Диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ перетворюється на диференціальне рівняння

$$\frac{dky_1}{dkx_1} = f\left(\frac{ky_1}{kx_1}\right), \ \frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{y_1}{x_1}\right).$$

При перетворенні подібності (4.30) інтегральні криві рівняння (4.29) знову переходять в інтегральні криві рівняння (4.29). Усі інтегральні криві однорідного диференціального рівняння подібні з центром подібності в початку координат. Якщо будь-яка інтегральна крива, що лежить в деякому секторі, входить у початок координат, то всі інтегральні криві в цьому секторі теж входять у початок координат. Якщо одна із інтегральних кривих замкнена, то всі інтегральні криві замкнені.

Приклад 4.36. Побудувати інтегральні криві однорідного диференціального рівняння $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$.

Розв'язання. Рівняння запишемо у вигляді $y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Скориставшись заміною $y = ux, \ \ y' = u'x + u$, отримаємо:

$$u'x = \frac{u^2 - 1}{2u} - u, \qquad u'x = -\frac{1 + u^2}{2u},$$

$$\frac{2udu}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln\left(1 + u^2\right) = -\ln|x| + \ln 2C.$$

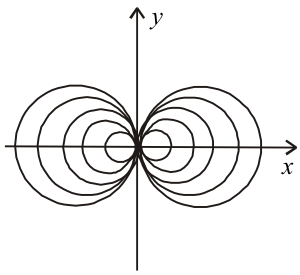

Рис. 4.27

Остаточно знаходимо інтеграл рівняння:

$$1 + u^2 = \frac{2C}{x}, \qquad 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{2C}{x},$$

$$x^2 + y^2 = 2Cx, \qquad (x - C)^2 + y^2 = C^2.$$

Інтегральні криві є колами, що проходять через початок координат (рис. 4.27). Усі інтегральні криві замкнені і входять у початок координат.

До однорідного диференціального рівняння зводиться рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + bx + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}, \tag{4.31}$$

де a, b, c, a_1, b_1, c_1 – сталі.

Якщо $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, то підстановкою $z = ax + by + c$ рівняння (4.31) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, то можна зробити таку заміну змінних $x = u + \alpha, \quad y = v + \beta$, що в лінійних функціях зникнуть вільні члени, тобто виконуватимуться рівності:

$$ax+by+c=au+bv, \qquad a_1x+b_1y+c_1=a_1u+b_1v.$$

Після такої заміни рівняння буде однорідним.

Приклад 4.37. Розв'язати рівняння $y'=\dfrac{x+2y+1}{2x+y-1}$.

Розв'язання. Для цього рівняння $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-4=-3\neq 0$, тому поклавши $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, дістанемо

$$dx=du, \qquad dy=dv, \qquad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du},$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+\alpha+2(v+\beta)+1}{2(u+\alpha)+v+\beta-1}, \qquad \frac{dv}{du}=\frac{u+2v+(\alpha+2\beta+1)}{2u+v+(2\alpha+\beta-1)}.$$

Сталі α і β доберемо так, щоб

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+1=0,\\ 2\alpha+\beta-1=0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-2\beta-1,\\ 2(-2\beta-1)+\beta-1=0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-2\beta-1\\ -3\beta-3=0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1,\\ \beta=-1.\end{cases}$$

Зробимо заміну $x=u+1, \quad y=v-1$ отримаємо однорідне рівняння:

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+2v}{2u+v}.$$

За допомогою підстановки $v=ut$, тоді $dv=u\,dt+t\,du$ знаходимо загальний інтеграл цього рівняння:

$$\frac{u\,dt+t\,du}{du}=\frac{u+2ut}{2u+ut}; \quad \Rightarrow \quad u\frac{dt}{du}+t=\frac{1+2t}{2+t}; \quad \Rightarrow \quad u\frac{dt}{du}=\frac{1+2t}{2+t}-t;$$

$$u\frac{dt}{du}=\frac{1-t^2}{2+t}; \quad \Rightarrow \quad \frac{2+t}{1-t^2}dt=\frac{du}{u}; \quad \Rightarrow \quad -\left(\frac{2}{t^2-1}+\frac{t}{t^2-1}\right)dt=\frac{du}{u};$$

$$2\cdot\int\left(\frac{2}{t^2-1}+\frac{t}{t^2-1}\right)dt=-2\int\frac{du}{u}; \quad \Rightarrow \quad 4\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\ln\left|t^2-1\right|=-2\ln|u|+\ln C;$$

$$\frac{C}{u^2}=\frac{(t-1)^3}{t+1}; \quad \Rightarrow \quad C(t+1)=u^2(t-1)^3.$$

Оскільки $v=ut$, $t=\dfrac{v}{u}$,то

$$C\left(\frac{v}{u}+1\right)=u^2\left(\frac{v}{u}-1\right)^3, \qquad C\left(\frac{v+u}{u}\right)=u^2\left(\frac{v-u}{u}\right)^3, \qquad C(v+u)=(v-u)^3, \quad C>0.$$

Звідси, враховуючи, що $u=x-1, \quad v=y+1$, дістанемо загальний інтеграл заданого рівняння

$$C(x+y)=(y-x+2)^3.$$

Лінійні диференціальні рівняння

Означення. *Лінійним диференціальним рівняння 1-го порядку* називається рівняння виду

$$y'+p(x)y'=q(x) \tag{4.32}$$

де $p(x)$ і $f(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Якщо $q(x)\equiv 0$, то диференціальне рівняння є *лінійним однорідним*. Якщо $q(x)\neq 0$, то диференціальне рівняння називається *лінійним неоднорідним*.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння інтегруються у квадратурах, як диференціальне рівняння із відокремленими змінними:

$$y' + p(x)y = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = -p(x)y, \qquad \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -p(x)dx, \qquad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|, \quad C \neq 0;$$

$$\ln|y| - \ln|C| = -\int p(x)dx, \quad C \neq 0; \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)dx, \quad C \neq 0; \qquad \frac{y}{C} = e^{-\int p(x)dx}, \quad C \neq 0;$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, C \neq 0.$$

Під час ділення на y був втрачений розв'язок $y = 0$, який відповідає нульовому значенню сталої C.

Отже, загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння шукають у вигляді

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

де $C = const$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 1-го порядку

$$y' + p(x)y' = q(x)$$

інтегрують:

1) методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа);

2) методом Бернуллі (Якоба).

1. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).

Лагранж запропонував загальний метод розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь. Спочатку розв'язується однорідне диференціальне рівняння. У загальний розв'язок входять довільні сталі. Потім шукається загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння і при цьому довільні сталі стають новими шуканими функціями.

Знайдемо розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (4.32).

Спочатку розв'яжемо однорідне диференціальне рівняння $y' + p(x)y = 0$. Загальний розв'язок має вигляд $y = Ce^{-\int p(x)dx}$. Шукаємо розв'язок неоднорідного диференціального рівняння у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

де $C(x)$ – невідома функція («варіюють довільну сталу»).

Справді,

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)).$$

Отже, підставивши у рівняння (4.32) значення y і y', отримаємо

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x), \qquad \frac{dC(x)}{dx} = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx};$$

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (4.32) має вигляд

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Звідси випливає

Теорема 27. *(про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння).* Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння дорівнює сумі загального розв'язку однорідного лінійного диференціального рівняння і частинного розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння.

Метод Лагранжа часто називають *методом варіації довільної сталої*.

Приклад 4.38. Розв'язати методом Лагранжа неоднорідне лінійне диференціальне рівняння $y' + xy = 1 + x^2$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$y' + xy = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = -xy, \qquad \frac{dy}{y} = -xdx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int xdx, \qquad \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \ln C, \qquad \ln|y| - \ln C = -\frac{x^2}{2}, \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\frac{x^2}{2},$$

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Шукаємо розв'язок неоднорідного диференціального рівняння у вигляді $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, тоді $y' = C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$. Підставивши в неоднорідне диференціальне рівняння значення y і y', дістанемо

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) + xC(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + x^2,$$

або

$$C'(x) = \left(1 + x^2\right)e^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$C(x) = \int\left(1 + x^2\right)e^{\frac{x^2}{2}}dx = \int e^{\frac{x^2}{2}}dx + \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}}dx = \left|\begin{matrix} u = e^{\frac{x^2}{2}}, & dv = dx \\ du = xe^{\frac{x^2}{2}}dx, & v = x \end{matrix}\right| = xe^{\frac{x^2}{2}} - \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}}dx +$$

$$+\int x^2 e^{\frac{x^2}{2}}dx = xe^{\frac{x^2}{2}} + C_1,$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y(x) = \left(xe^{\frac{x^2}{2}} + C_1\right)e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad y(x) = x + C_1e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2. Метод Бернуллі.

Метод Бернуллі полягає в тому, що загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$y = u(x)\cdot v(x),$$

де $u(x)$, $v(x)$ – невідомі функції, одну з яких можна вибрати довільно (але не рівна тотожно нулю).

Знаходячи похідну $y' = u'\cdot v + v'\cdot u$ і підставляючи в неоднорідне диференціальне рівняння (4.32) значення y і y', дістанемо

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x);$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

Вибираємо $v(x)$ так, щоб вираз в дужках став рівним нулеві

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$$

Із першого рівняння знаходимо змінну v:

$$v' = -p(x)v, \qquad \frac{dv}{dx} = -p(x)v, \qquad \frac{dv}{v} = -p(x)dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx, \qquad \ln|v| = -\int p(x)dx, \qquad v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Із другого рівняння знаходимо змінну u:

$$u' = q(x)v^{-1}, \qquad u' = q(x)e^{\int p(x)dx}, \qquad u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Остаточно маємо загальний розв'язок рівняння (4.32) у вигляді

$$y = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Приклад 4.39. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' + y = x^2$.

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді добутку функцій $y = u \cdot v$. Тоді $y' = u' \cdot v + uv'$. Підставляючи, дістаємо рівняння

$$x(u'v + uv') + uv = x^2.$$

Зведемо це рівняння до системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} xuv' + uv = 0, \\ xu'v = x^2. \end{cases}$$

Із першого рівняння $xv' + v = 0$ знаходимо v:

$$v' = -\frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \qquad \ln|v| = -\ln|x|, \qquad v = x^{-1}.$$

Із другого рівняння маємо:

$$xu'x^{-1} = x^2, \qquad u' = x^2, \qquad u = \int x^2 dx, \qquad u = \frac{x^3}{3} + c.$$

Знаходимо розв'язок:

$$y = uv, \qquad y = \left(\frac{x^3}{3} + c \right) x^{-1}.$$

До лінійного диференціального рівняння зводиться рівняння Бернуллі.

Означення. *Рівнянням Бернуллі* називають диференціальне рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1). \tag{4.33}$$

При $\alpha = 1$ маємо однорідне лінійне рівняння

$$y' + (p(x) + q(x))y = 0.$$

При $\alpha = 0$ маємо неоднорідне лінійне рівняння

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Припускаючи $y \neq 0,\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$, поділимо рівняння (4.33) на y^{α}, тоді матимемо рівняння виду:

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Таким чином, заміною $z = y^{1-\alpha}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння:

$$\frac{z'}{1-\alpha}+p(x)z=q(x).$$

Проте на практиці розв’язок рівняння Бернуллі зручніше шукати методом Бернуллі у вигляді $y=u\cdot v$, не зводячи його до лінійного рівняння. Слід зазначити, що при $\alpha>0$, крім розв’язку $y=u\cdot v\neq 0$, рівняння Бернуллі має розв’язок $y\equiv 0$.

Приклад 4.40. Знайти розв’язок диференціального рівняння $xy'+y=y^2\ln x$.

Розв’язання. Розв’язок шукаємо у вигляді добутку функцій $y=u\cdot v$, тоді $y'=u'\cdot v+uv'$.

$$x(u'v+uv')+uv=(u\cdot v)^2\ln x.$$

$$u'vx+uv'x+uv=u^2v^2\ln x;\qquad u(v'x+v)+u'vx=u^2v^2\ln x.$$

Зведемо це рівняння до системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} v'x+v=0, \\ u'vx=u^2v^2\ln x. \end{cases}$$

Із першого рівняння $xv'+v=0$ знаходимо v:

$$v'=-\frac{v}{x},\qquad \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x},\qquad \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},\qquad \ln|v|=-\ln|x|,\qquad v=x^{-1}=\frac{1}{x}.$$

Із другого рівняння знаходимо u:

$$u'x\frac{1}{x}=u^2\left(\frac{1}{x}\right)^2\ln x,\qquad u'=\frac{u^2\ln x}{x^2},\qquad \frac{du}{dx}=\frac{u^2\ln x}{x^2},\qquad \frac{du}{u^2}=\frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Після інтегрування отримаємо

$$-\frac{1}{u}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-C.$$

Оскільки $\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\int\ln x\cdot\frac{1}{x^2}dx=\begin{vmatrix} u=\ln x & dv=\frac{1}{x^2}dx \\ du=\frac{dx}{x} & v=-\frac{1}{x}\end{vmatrix}=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}.$

Тоді

$$-\frac{1}{u}=-\frac{\ln x+1+Cx}{x};\qquad u=\frac{x}{\ln x+1+Cx}.$$

Отже, загальний розв’язок рівняння:

$$y=uv,\qquad y=\left(\frac{x}{\ln x+1+Cx}\right)\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\ln x+1+Cx}.$$

Диференціальні рівняння у повних диференціалах

Означення. Диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{4.34}$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Тоді загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд

$$u(x,y)=C=const.$$

Для того, щоб рівняння (4.34) було рівнянням в повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб
$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{4.35}$$
Якщо для рівняння (4.34) умова (4.35) виконується, то невідома функція $u(x,y)$ задовольняє рівності
$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y), \tag{4.36}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y). \tag{4.37}$$
Інтегруючи рівність (4.36) по x, визначимо функцію $u(x,y)$ з точністю до довільної диференційовної функції $\varphi(y)$:
$$u(x,y)=\int P(x,y)dx=F(x,y)+\varphi(y),$$
де $F(x,y)$ – первісна функції $P(x,y)$по x. Диференціюючи останню рівність по y і враховуючи (4.37), дістаємо рівняння для знаходження функції $\varphi(y)$:
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}+\frac{d\varphi(y)}{dy}=Q(x,y).$$
В окремому випадку можна скористатись формулою
$$\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C. \tag{4.38}$$
Значення x_0, y_0 можуть бути довільними числами.

Приклад 4.41. Розв'язати диференціальне рівняння $(2x+2y)dx+(2x-2y)dy=0$.
Розв'язання. Перевіримо спочатку виконання умови (4.35):
$$P(x,y)=2x+2y, \qquad Q(x,y)=2x-2y,.$$
$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2.$$
Умова (4.35) виконується, то невідома функція $u(x,y)$ задовольняє рівності
$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=2x+2y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=2x-2y.$$
Інтегруємо рівність $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=2x+2y$ по x:
$$u(x,y)=\int(2x+2y)dx=x^2+2xy+\varphi(y).$$
Диференціюємо останню рівність по y і враховуючи $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=2x-2y$, дістаємо рівняння для знаходження функції $\varphi(y)$:
$$2x+\varphi'(y)=2x-2y; \qquad \varphi'(y)=-2y; \qquad \varphi(y)=-y^2+C_1,$$
тому
$$u(x,y)=x^2+2xy-y^2+C_1.$$
Отже, загальний інтеграл заданого рівняння виражається рівністю
$$x^2+2xy-y^2=C.$$

Л. Ейлер довів, що для будь-якого диференціального рівняння першого порядку

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

для якого не виконується умова (4.35), існує інтегрувальний множник $\mu = \mu(x,y)$ такий, що диференціальне рівняння

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

є диференціальним рівнянням у повних диференціалах. Із умови виду (4.35) маємо

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x},$$

тобто

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial x},$$

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

або

$$P\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (4.39)$$

шукаємо інтегрувальний множник μ, а потім інтегруємо рівняння (4.34).

Якщо рівняння (4.34) має інтегрувальний множник, який залежить лише від x, тобто $\mu = \mu(x)$, тоді в рівнянні (4.39) $\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = 0$ і для знаходження μ матимемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

з якого визначається $\ln\mu$, а потім і μ. В останньому рівнянні вираз $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ залежить лише від x.

Аналогічно якщо $\mu = \mu(y)$, то інтегрувальний множник є функцією однієї змінної y і його знаходять з рівняння

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Приклад 4.42. Розв’язати рівняння $(x^2 - 2y)dx + (-x)dy = 0$.

Розв’язання. Маємо: $P(x,y) = x^2 - 2y, \quad Q(x,y) = -x, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1.$

Умова (4.35) не виконується. Розглядуване диференціальне рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Складемо рівняння (4.39).

Припустимо, що інтегрувальний множник μ залежить тільки від x. Дістанемо рівняння $\frac{d\ln\mu(x)}{dx} = \frac{1}{x}, \ \ln\mu(x) = \ln|x|, \quad \mu(x) = x.$ Помножимо початкове диференціальне рівняння на x і дістанемо рівняння в повних диференціалах: $(x^3 - 2xy)dx - x^2dy = 0$, яке легко інтегрувати. Застосуємо формулу (4.38).

$$\int_0^x x^3dx + \int_0^y (-x^2)dy = C, \qquad \frac{x^4}{4} - x^2y = C.$$