4.5 Диференціальні рівняння вищих порядків

Задача Коші

Розглянемо диференціальне рівняння n-го порядку, розв’язане щодо старшої похідної

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right).$$

Щоб з нескінченної множини розв’язків цього диференціального рівняння вилучити певний розв’язок, треба підкорити його деяким додатковим умовам.

Означення. Розв’язок $y = y(x)$ диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right),$$

що задовольняє *початкові умови*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

називають *частинним розв’язком* диференціального рівняння, який задовольняє ці початкові умови.

Означення. Сукупність функцій

$$y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n),$$

де C – довільна стала, називають *загальним розв’язком* диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right),$$

якщо:

1) функція $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ є розв’язком цього диференціального рівняння для будь-яких сталих $C_1, C_2, ..., C_n$;

2) для будь-яких початкових умов

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

існує єдиний набір значень $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$ такий, що функція $y = y\left(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right)$ задовольняє цим початковим умовам.

Задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку полягає у знаходженні розв’язку диференціального рівняння, який задовольняє n початкових умов. Приміром, геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння 2-го порядку

$$y'' = f(x, y, y'),$$
$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

Полягає в тому, що з множини інтегральних кривих, які проходять через точку $M_0(x_0, y_0)$ треба вибрати криву, що має заданий кутовий коефіцієнт дотичної в точці M_0 рівний y'_0.

Теорема 28 (існування та єдиності розв’язку задачі Коші). Якщо в задачі Коші для диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$$

З початковими умовами:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

функція $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ та її частинні похідні $f'_y, f'_{y'}, ..., f'_{y^{(n-1)}}$ неперервні в деякій області D**,** то для будь-якої точки $M_0\left(x_0; y_0; y'_0; ...; y_0^{(n-1)}\right) \in D$ існує єдиний розв’язок $y = y(x)$ задачі Коші.

Рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку

1. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x), \tag{4.40}$$

де $f(x)$ – відома неперервна функція. Враховуючи, що $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, і інтегруючи за змінною x ліву і праву частини рівняння, дістаємо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

тобто приходимо до рівняння того ж типу, що й початкове; далі маємо

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2.$$

Після n кроків дістаємо загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y(x) = \int\left[\int\left(...\int f(x)dx...\right)dx\right]dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n.$$

Приклад 4.43. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y''' = x + \cos x$.

Розв’язання.

$$y'' = \int(x + \cos x)dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C_1.$$

$$y' = \int\left(\frac{x^2}{2} + \sin x + C_1\right)dx = \frac{x^3}{6} - \cos x + C_1x + C_2.$$

$$y = \int\left(\frac{x^3}{6} - \cos x + C_1x + C_2\right)dx = \frac{x^4}{24} - \sin x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3.$$

2. Якщо *рівняння не містить шуканої функції та її похідних до порядку* $(k-1)$ включно, тобто

$$F\left(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{4.41}$$

то порядок рівняння можна знизити до порядку $(n-k)$ заміною

$$y^{(k)} = z(x).$$

Після такої заміни рівняння набуде вигляду

$$F\left(x, z, z', ..., z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Окремим випадком рівняння (4.41) є рівняння

$$F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0,$$

яке за допомогою нової змінної $z = y^{(n-1)}$, $z' = y^{(n)}$ зводяться до рівняння першого порядку:

$$F(x,\ z,\ z') = 0.$$

Якщо для цього рівняння вдається знайти загальний розв’язок $z = z(x, C_1)$, то приходимо до рівняння $y^{(n-1)} = z(x, C_1)$ виду (4.40), яке інтегрується в квадратурах.

Зауваження. Якщо маємо рівняння $F(x, y', y'') = 0$, то зробивши заміну $y' = z,\ y'' = z'$, отримаємо рівняння вигляду $F(x,\ z,\ z') = 0$. Якщо буде знайдено загальний розв’язок цього рівняння $z = z(x, C_1)$, то отримаємо $y = \int z(x,\ C_1)dx + C_2$.

Якщо диференціальне рівняння другого порядку має вигляд $y'' = p(x)q(y')$, то беремо $y' = z,\ y'' = z'$ і отримаємо диференціальне рівняння першого порядку $z' = p(x)q(z)$ з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dz}{dx} = p(x)q(z), \qquad \frac{dz}{q(z)} = p(x)dx, \qquad \int\frac{dz}{q(z)} = \int p(x)dx.$$

Приклад 4.44. Розв'язати диференціальне рівняння другого порядку $y'' = \dfrac{y'}{1+x}$.

Розв'язання. При $z = y'$, $z' = y''$ дістанемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$z' = \frac{z}{1+x}, \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{1+x}, \qquad \ln|z| = \ln|1+x| + \ln C_1,$$

$$z = C_1(1+x), \qquad y' = C_1(1+x), \qquad y = \int C_1(1+x)dx.$$

Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку:

$$y = C_1\left(x + \frac{x^2}{2}\right) + C_2.$$

Приклад 4.45. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + y' = 0$.

Розв'язання. Вважаючи, що $y' = z,\ y'' = z'$, знижуємо порядок і приходимо до диференціального рівняння першого порядку:

$$z' + z = 0, \qquad \frac{dz}{dx} = -z, \qquad \frac{dz}{z} = -dx,$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int dx, \qquad \ln z = -x + \ln C_1, \qquad z = C_1 e^{-x}.$$

Інтегруючи z, дістаємо загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку:

$$y' = C_1 e^{-x}, \qquad y = \int C_1 e^{-x} dx + C_2, \qquad y = -C_1 e^{-x} + C_2.$$

3. Якщо диференціальне *рівняння не містить явно незалежної змінної* x, тобто має вигляд

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{4.42}$$

то його порядок можна знизити на одиницю підстановкою

$$y' = z(y),$$

де $z(y)$ розглядають як нову невідому функцію, а y беруть (тимчасово) за незалежну змінну. У цьому разі всі похідні $\dfrac{d^k y}{dx^k}$, $k = \overline{1,n}$ треба виразити через похідні від функції z за y:

$$y' = \frac{dy}{dx} = z,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dy}\left(z\frac{dz}{dy}\right) \cdot \frac{dy}{dx} = \left(\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dy^2}\right)z = z\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z^2\frac{d^2z}{dy^2}, \ \ldots\ldots$$

Зауваження. Розв'язуючи задачу Коші для диференціального рівняння доцільно визначати значення сталих під час розв'язування, а не після знаходження загального розв'язку рівняння.

Окремим випадком рівняння (4.42) є рівняння

$$F(y, y', y'') = 0,$$

яке підстановкою $z = y'$, $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$ зводиться до диференціального рівняння першого порядку: $F\left(y, z, z\dfrac{dz}{dy}\right) = 0$. Якщо знайдемо загальний розв'язок цього рівняння, то для пошуку загального розв'язку рівняння $F(y, y', y'') = 0$ отримаємо рівняння:

$$y' = z(y, C_1), \qquad \frac{dy}{dx} = z(y, C_1), \qquad \int \frac{dy}{z(y, C_1)} = x + C_2.$$

Якщо диференціальне рівняння другого порядку має вигляд $y'' = p(y)q(y')$, то приходимо до диференціального рівняння першого порядку $z\dfrac{dz}{dy} = p(y)q(z)$ з відокремлюваними змінними: $\dfrac{zdz}{q(z)} = p(y)dy$, $\int \dfrac{zdz}{q(z)} = \int p(y)dy$. Визначивши $z = z(y, C_1)$, знаходимо y з диференціального рівняння першого порядку $\dfrac{dy}{dx} = z(y, C_1)$: $\int \dfrac{dy}{z(y, C_1)} = x + C_2$.

Приклад 4.46. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y = 0$.

Розв'язання. Узявши $y' = z$, дістанемо $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$ і прийдемо до диференціального рівняння першого порядку

$$z\frac{dz}{dy} + y = 0, \qquad zdz + ydy = 0, \qquad z^2 + y^2 = C_1^2.$$

Знаходимо змінну $z = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$ і приходимо до диференціального рівняння першого порядку $y' = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$, розв'язуючи яке, дістаємо:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm dx, \qquad \arcsin\frac{y}{C_1} = \pm x + C_2, \qquad y = C_1 \sin(\pm x + C_2).$$

4. Диференціальне рівняння є однорідним відносно шуканої функції та її похідних, тобто

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^m F(x, y, y', y''). \tag{4.43}$$

В однорідному рівнянні другого порядку $F(x, y, y', y'') = 0$, узявши

$$y' = yz, \qquad y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'),$$

прийдемо до диференціального рівняння першого порядку виду $F(x, 1, z, z^2 + z') = 0$.

Якщо знайдено загальний розв'язок цього диференціального рівняння $z = z(x, C_1)$, то далі маємо:

$$\frac{y'}{y} = z(x, C_1), \qquad \int \frac{y'}{y}dx = \int z(x, C_1)dx,$$

$$\ln|y| = \int z(x, C_1)dx + \ln C_2, \qquad y = C_2 e^{\int z(x, C_1)dx}.$$

Приклад 4.47. Знайдемо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння $y''y + (y')^2 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну $y' = yz$, $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$, приходимо до диференціального рівняння першого порядку

$$y^2(z^2 + z') + (yz)^2 = 0, \qquad z^2 + z' + z^2 = 0, \qquad z' = -2z^2,$$

звідки

$$\frac{dz}{dx} = -2z^2, \qquad -\frac{dz}{z^2} = 2dx, \qquad \frac{1}{z} = 2x + C_1, \qquad z = \frac{1}{2x + C_1}.$$

Із диференціального рівняння $y' = y\dfrac{1}{2x + C_1}$ знаходимо загальний розв'язок

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{1}{2x+C_1}, \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x+C_1}, \qquad \ln y = \frac{1}{2}\ln|2x+C_1| + \ln C_2, \qquad y = C_2\sqrt{|2x+C_1|}\,.$$

Лінійні диференціальні рівняння

Означення. *Лінійним диференціальним рівнянням* n-го *порядку* називається рівняння виду

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = \varphi(x), \qquad b_0(x) \neq 0, \tag{4.44}$$

де $b_0(x),\ b_1(x),\ \ldots,\ b_n(x),\ \varphi(x)$ – задані на деякому відрізку $[a;b]$ функції.

Означення. Функції $b_0(x),\ b_1(x),\ \ldots,\ b_n(x)$ називаються *коефіцієнтами даного рівняння*, а функція $\varphi(x)$ – його *вільним членом*.

Означення. Якщо $\varphi(x) \equiv 0,$ то диференціальне рівняння називається *лінійним однорідним (ЛОДР)*, якщо $\varphi(x) \neq 0,$ то диференціальне рівняння називається *лінійним неоднорідним (ЛНДР)*.

Коефіцієнт $b_0(x) \neq 0$ в своїй області визначення, бо в противному разі рівняння (4.44) не було б рівнянням n-го порядку. Поділивши рівняння (4.44) на $b_0(x)$, дістанемо

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{4.45}$$

де

$$a_i(x) = \frac{b_i(x)}{b_0(x)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad f(x) = \frac{\varphi(x)}{b_0(x)}.$$

Таким чином, диференціальне рівняння виду (4.44) завжди можна звести до виду (4.45). У зв'язку з цим ми надалі розглядатимемо лише такі рівняння.

Теорема 29. Якщо в деякому інтервалі $(a;b)$ (скінченному чи нескінченному) коефіцієнти $a_i(x)$ і вільний член $f(x)$ – це неперервні функції, то рівняння (4.45) при будь-яких початкових умовах

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad x_0 \in (a;b)$$

має єдиний розв'язок, який задовольняє ці умови.

Надалі вважатимемо, що коефіцієнти і вільний член рівняння (4.45) є неперервними функціями.

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0\,. \tag{4.46}$$

Теорема 30. Якщо $y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x)$— частинні розв'язки *ЛОДР* (4.46), то будь-яка лінійна комбінація цих розв'язків $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ також є частинним розв'язком *ЛОДР* (4.46).

Означення. Функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називають *лінійно залежними* в інтервалі $(a;b)$, якщо існують такі сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$, що в цьому інтервалі виконано тотожність за змінною x:

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) \equiv 0\,,$$

причому, хоча б одне з чисел C_i відмінне від нуля.

Якщо ця тотожність правдива лише при $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, то функції $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ називають *лінійно незалежними* в інтервалі $(a;b)$.

Якщо функції $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ лінійно залежні, то одна з них є лінійною комбінацією решти, наприклад:

$$y_1(x) = C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x).$$

Приклад. Функції $y_1(x) = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $y_2(x) = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $y_3(x) = e^x$ є лінійно залежними, оскільки $y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$.

Теорема 31. Якщо *n* функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ мають похідні до $(n-1)$-го порядку включно, то ці функції будуть лінійно незалежними, якщо визначник Вронського для них

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

не дорівнює тотожно нулю.

Означення. Якщо $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ — лінійно незалежні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння (4.46), то вони називаються *базисом* або *фундаментальною системою розв'язків ЛОДР*.

Теорема 32. Якщо $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ — фундаментальна система розв'язків ЛОДР n-го порядку, то однорідне диференціальне рівняння має загальний розв'язок

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x),$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ — довільні сталі.

Теорема 33. Якщо $y_ч(x)$ — частинний розв'язок ЛНДР (4.45), то загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y = y_0 + y_ч,$$

де y_0 — загальний розв'язок ЛОДР (4.46).

Якщо відомий загальний розв'язок ЛОДР, то знайдений частинний розв'язок ЛНДР завжди можна звести до квадратур, тобто до інтегрування скінченної кількості відомих функцій.

Найкраще вивчено властивості лінійних диференціальних рівнянь, тому вони частіше за все використовуються на практиці. Часто нелінійні диференціальні рівняння замінюються близькими до них лінійними диференціальними рівняннями. Загальні властивості розв'язків лінійного диференціального рівняння розглянемо на прикладі лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{4.47}$$

Диференціальне рівняння (4.47) називається *однорідним*, якщо $f(x) \equiv 0$, і *неоднорідним*, якщо $f(x) \neq 0$. Неоднорідне рівняння завжди може бути розв'язане, якщо знайдено загальний розв'язок однорідного рівняння. Отже, розглядаємо в подальшому властивості розв'язків однорідного лінійного диференціального рівняння.

Загальні властивості розв'язків однорідного лінійного диференціального рівняння

I. Нехай відомі два частинні розв'язки диференціального рівняння

$$y = y_1(x), \qquad y = y_2(x). \tag{4.48}$$

Тоді їх сума $y = y_1(x) + y_2(x)$ теж є розв'язком диференціального рівняння.

II. Якщо відомий частинний розв'язок диференціального рівняння $y = y_1(x)$, тоді функція $y = C_1 y_1(x)$, $C_1 = \mathrm{const}$ теж є розв'язком диференціального рівняння.

Наслідок. Якщо відомі два частинні розв'язки $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ диференціального рівняння, то функція $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ теж є розв'язком диференціального рівняння.

Означення. Два розв'язки диференціального рівняння (4.48) називаються *лінійно незалежними*, якщо $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \mathrm{const}$.

Два розв'язки (4.48) називаються *лінійно залежними*, якщо $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv \mathrm{const}$.

Означення. Функціональний визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x) \tag{4.49}$$

називається *визначником Вронського*.

III. Якщо два розв'язки (4.48) лінійно залежні, то їхній визначник Вронського тотожно дорівнює нулеві.

IV. Для визначника Вронського (4.49) виконується *формула Ліувілля—Остроградського*

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}. \tag{4.50}$$

Наслідок. Якщо визначник Вронського $W(x)$ перетворюється у деякій точці $x = x_0$ в нуль, а $p(x)$ — неперервна функція, то $W(x) \equiv 0$.

V. Якщо визначник Вронського (4.49) дорівнює нулю, то розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$ — лінійно залежні.

Справді, нехай $W(x) = 0$. Це означає, що

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0, \qquad \frac{y_1' y_2 - y_2' y_1}{y_2^2} = 0, \qquad \left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = 0, \qquad \frac{y_1}{y_2} = \mathrm{const}.$$

VI. Якщо два розв'язки ДР (4.48) лінійно незалежні, то лінійні однорідні диференціальні рівняння мають загальний розв'язок

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \tag{4.51}$$

Для розв'язування задачі Коші з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'$$

дістаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для C_1, C_2

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \qquad C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' \tag{4.52}$$

з визначником $W(x_0) \neq 0$. Отже, система рівнянь (4.52) завжди має розв'язок.

VII. Якщо відомий один частинний розв'язок диференціального рівняння, тоді другий розв'язок знаходиться квадратурою.

Нехай відомий розв'язок $y = y_1(x)$. Із формули (4.50)

$$y_2' y_1 - y_1' y_2 = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}, \qquad C = W(x_0),$$

знаходимо $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = \dfrac{C}{y_1^2} e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$.

Інтегруючи це рівняння, дістаємо інший зв'язок:

$$y_2 = Cy_1 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} dx. \qquad (4.53)$$

Приклад. Лінійне диференціальне рівняння $y'' - (x+1)y' + y = 0$ має розв'язок $y_1 = x+1$. Із формули (4.53) знаходимо другий частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$y_2 = C(x+1)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{(x+1)^2} e^{0,5x^2+x} dx.$$

VIII. Якщо відомі два лінійно незалежні розв'язки однорідного диференціального рівняння, то розв'язування неоднорідного диференціального рівняння (4.47) може бути зведене до квадратур.

Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

I. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + p y' + q y = 0, \qquad (4.54)$$

де p, q – дійсні числа.

Щоб знайти загальний розв'язок цього рівняння треба знайти будь-які два його лінійно незалежні розв'язки. Згідно з ***методом Ейлера***, шукатимемо їх у вигляді

$$y = e^{kx}, \quad k \in C.$$

Тоді

$$y' = ke^{kx}, \qquad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Підставляючи вирази для y, y', y'' у диференціальне рівняння, дістанемо

$$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то повинно виконуватись рівність

$$k^2 + pk + q = 0, \qquad (4.55)$$

яку називають ***характеристичним рівнянням*** для диференціального рівняння.

Корені квадратного характеристичного рівняння, які позначимо через k_1 та k_2 можуть бути:

1) дійсними різними $(k_1 \neq k_2)$;

2) комплексними спряженими $(k_{1,2} = \alpha \pm \beta i)$;

3) дійсними рівними $(k_1 = k_2)$.

1. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:* $k_1 \neq k_2$, то частинними розв'язками диференціального рівняння будуть функції

$$y_1 = e^{k_1 x}, \qquad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні $(k_1 \neq k_2)$

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}$$

і, отже, утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння. Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{4.56}$$

2. *Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені:* $k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i$. Частинні розв'язки диференціального рівняння можна записати у вигляді

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, \qquad y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

За формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

маємо

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x);$$
$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Із властивостей ЛОДР випливає, що частинними розв'язками диференціального рівняння будуть також функції

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{e^{\alpha x}\cos\beta x} = tg\beta x \neq const,$$

і, отже, утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння. Тому загальний розв'язок рівняння запишеться у вигляді

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \sin\beta x + C_2\cos\beta x). \tag{4.57}$$

3. *Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні:* $k_1 = k_2 = k$. Один частинний розв'язок

$$y_1 = e^{kx}.$$

Другий частинний розв'язок, лінійно незалежний з першим, шукатимемо у вигляді $y_2 = ue^{kx}$, де $u = u(x)$ – невідома функція від x. Диференціюючи, дістанемо

$$y_2' = u'e^{kx} + kue^{kx},$$
$$y_2'' = u''e^{kx} + 2u'ke^{kx} + uk^2e^{kx}.$$

Підставляючи одержані вирази у диференціальне рівняння (4.54), маємо

$$u''e^{kx} + 2u'ke^{kx} + uk^2e^{kx} + p(u'e^{kx} + kue^{kx}) + que^{kx} = 0,$$
$$e^{kx}\left[u'' + (2k+p)u' + (k^2 + pk + q)u\right] = 0.$$

Оскільки k – корінь рівняння (4.55), то $k^2 + pk + q = 0$ і за теоремою Вієта $2k = -p$, тому $2k + p = 0$ і $u'' = 0$, звідси $u = C_1 x + C_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі. Поклавши $C_1 = 1, C_2 = 0$ (нас цікавить який-небудь розв'язок $u(x) \neq 0$), знайдемо другий частинний розв'язок рівняння (4.54):

$$y_2 = xe^{kx}.$$

Цей розв'язок лінійно незалежний з першим, оскільки $\dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{xe^{kx}}{e^{kx}} = x \neq const$.

Розв’язки $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ утворюють фундаментальну систему розв’язків рівняння. Тому загальний розв’язок рівняння запишеться у вигляді

$$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right). \tag{4.58}$$

Приклад 4.48. Розв’язати диференціальні рівняння. В пункті в) знайти частинний розв’язок, що задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

$a)$ $y'' - 5y' - 6y = 0$;

$a)$ $y'' + 16y = 0$;

$a)$ $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 2$.

Розв’язання.

а) Дане рівняння є лінійним однорідним рівнянням другого порядку. Запишемо характеристичне рівняння, що відповідає даному і розв’яжемо його:

$$k^2 - 5k - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = 6, \\ k_{2,3} = -1. \end{array}\right.$$

Отже, за формулою (4.56) загальний розв’язок даного однорідного рівняння має вигляд: $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}$.

б) Складемо характеристичне рівняння:

$k^2 + 16 = 0$,

$k^2 = -16$,

$k_1 = -4i, \quad k_2 = 4i$.

Отже, загальний розв’язок даного однорідного рівняння за формулою (4.57) має вигляд: $y = e^{0x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right) = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$.

в) Запишемо характеристичне рівняння, що відповідає даному і розв’яжемо його:

$$k^2 + 6k + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = -3, \\ k_2 = -3. \end{array}\right.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні, причому корінь $k = -3$ – корені кратності два. Отже, загальний розв’язок даного однорідного рівняння за формулою (4.58) має вигляд: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$.

Скористаємось початковими умовами. Оскільки $y' = -3C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-3x} - 3C_2 x e^{kx}$, то $\begin{cases} C_1 = 0, \\ -3C_1 + C_2 = 2; \end{cases}$ звідси маємо $C_1 = 0, C_2 = 2.$

Знаходимо шуканий розв’язок: $y = 2xe^{-3x}$.

Приклад 4.49. Знайдемо період коливань математичного маятника довжиною l (рис. 4.28).

Розв’язання. Коливання маятника описуються диференціальним рівнянням

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi,$$

де t — час, φ — кут відхилення маятника, $g = 9{,}8$ м/с^2 — прискорення вільного падіння.

При малих коливаннях $\sin\varphi \approx \varphi$. Приходимо до диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

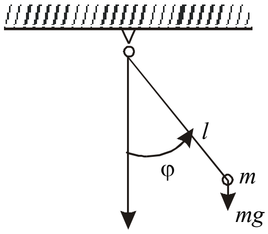

Рис. 4.28

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=0,\text{ де } \omega^2=gl^{-1}.$$

Характеристичне рівняння $p^2+\omega^2=0$ має корені $p_{1,2}=\pm i\omega$, $i=\sqrt{-1}$.

Диференціальне рівняння має загальний розв'язок $\varphi=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}=(C_1+C_2)\cos\omega t+i(C_1-C_2)\sin\omega t$.

Цей розв'язок має період $T=2\pi\omega^{-1}=2\pi\sqrt{g^{-1}l}$.

II. Загальний випадок: рівняння довільного порядку

Розглянемо ЛОДР довільного порядку $n>1$ зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=0,$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – дійсні числа. Розв'язуємо це рівняння так само як і рівняння 2-го порядку за методом Ейлера.

1. Шукаємо розв'язок у вигляді $y=e^{kx}$, $k\in C$. Підставляючи замість y величину e^{kx} дістаємо характеристичне рівняння

$$e^{kx}\varphi(k)=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi(k)=k^n+p_1k^{n-1}+\ldots+p_{n-1}k+p_n=0.$$

2. Знаходимо корені характеристичного рівняння.

3. За природою коренів виписуємо частинні лінійно незалежні розв'язки рівняння, керуючись тим, що:

а) кожному дійсному однократному кореню k характеристичного рівняння відповідає частинний розв'язок

$$e^{kx};$$

б) кожній парі однократних комплексно-спряжених коренів $k_1=\alpha+\beta i,\quad k_2=\alpha-\beta i$ відповідає пара лінійно незалежних частинних розв'язків

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\qquad e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

в) кожному дійсному кореню k кратності r відповідає r лінійно незалежних частинних розв'язків

$$e^{kx},\quad xe^{kx},\quad \ldots,\quad x^{r-1}e^{kx}.$$

г) кожній парі комплексно-спряжених коренів $k_1=\alpha+\beta i,\quad k_2=\alpha-\beta i$ кратності 2μ відповідає 2μ частинних розв'язки

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots,\quad x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \ldots,\quad x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

4. Маючи n лінійно незалежних розв'язків $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, які утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОДР, дістаємо загальний розв'язок цього рівняння

$$y=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x),$$

де $C_1, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

Приклад 4.50. Розв'язати диференціальні рівняння.

а) $y'''-6y''+11y'-6y=0$;

б) $y'''+3y''+3y'+y=0$.

Розв'язання.

а) Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^3-6k^2+11k-6=0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k_1=1, \\ k_2=2, \\ k_3=3. \end{array}\right.$$

Отже, загальний розв'язок даного однорідного рівняння має вигляд: $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$.

б) Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$k^3+3k^2+3k+1=0$,

$(k+1)^3=0$.

Рівняння має трикратний корінь $k_{1,2,3}=-1$, тоді рівняння має лінійно незалежні частинні розв'язки $y_1=e^{-x}$, $y_2=xe^{-x}$, $y_3=x^2e^{-x}$. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд: $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3x^2e^{-x}$.

III. Інтегрування лінійного неоднорідного диференціального рівняння методом варіації довільних сталих.

Обмежимося випадком рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{4.59}$$

де $p,\ q$ – дійсні числа, функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі $(a;b)$.

Для інтегрування ЛНДР застосуємо *метод Лагранжа (варіювання довільних сталих)*.

1. Знаходимо загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння

$$y''+p\,y'+q\,y=0,$$

у вигляді

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

2. Згідно з гіпотезою Лагранжа загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння шукаємо у вигляді

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x),$$

де $C_1(x), C_2(x)$ – нові невідомі функції.

3. Щоб знайти функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ потрібно одержати два співвідношення для них.

Знаходимо вирази для $y'(x)$ та $y''(x)$.

$$y'=C_1'(x)y_1(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_2(x)y_2'(x).$$

Накладемо на $C_1(x)$ і $C_2(x)$ умову, щоб

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0.$$

Тоді $y'=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)$.

Знайдемо другу похідну

$$y''=C_1'(x)y_1'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_2(x)y_2''(x).$$

Підставивши значення $y,\ y',\ y''$ в рівняння (4.59), дістанемо

$$C_1(x)\left[y_1''(x)+py_1'(x)+qy_1(x)\right]+C_2(x)\left[y_2''(x)+py_2'(x)+qy_2(x)\right]+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).$$

Оскільки $y_1(x),\ y_2(x)$ – розв'язки однорідного рівняння (4.54), то вирази в квадратних дужках дорівнюють нулю, а тому

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).$$

Для знаходження функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ дістаємо систему 2-го порядку лінійних алгебраїчних рівнянь щодо $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases} \tag{4.60}$$

Визначник цієї системи

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\neq 0,$$

оскільки система розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$ є фундаментальною. Інтегруючи $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$ знаходимо шукані функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$.

Приклад 4.51. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+y=\mathrm{tg}x$.

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння: $y''+y=0$. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2+1=0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} k_1=-i, \\ k_2=i, \end{array}\right. \;\Rightarrow\; y_{з.о.}=e^{0x}(C_1\cos x+C_2\sin x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$.

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ складемо систему рівнянь виду (4.60):

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0, \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=tgx. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему за формулами Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ tgx & \cos x \end{vmatrix}=0-\sin x\cdot tgx=-tgx\cdot\sin x;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \cos x & o \\ -\sin x & tgx \end{vmatrix}=\cos x\cdot tgx-0=\sin x.$$

Отже, $C_1'(x)=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\mathrm{tg}x\cdot\sin x, C_2'(x)=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\sin x$.

Інтегруючи, дістаємо

$$C_1(x)=\sin x-\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1, \qquad C_2(x)=-\cos x+C_2,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі і, отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\cdot\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

IV. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами правою частиною спеціального вигляду.

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$y''+py'+qy=f(x),$$

де $p,\ q$ – дійсні числа, функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі $(a;b)$.

Згідно теореми 33 загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння являє собою суму частинного розв'язку рівняння і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння: $y = y_0 + y_ч$. Загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння ми вже знаходити вміємо, тому розглянемо питання про знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Насамперед слід зазначити, що частинний розв'язок неоднорідного рівняння можна знайти в квадратурах методом довільних сталих (дивись в попередній пункт). Проте для рівнянь із спеціальною правою частиною частинний розв'язок можна знайти значно простіше, не вдаючись до операції інтегрування.

Розглянемо деякі з таких рівнянь.

1. Рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x} P_n(x),$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n.

а) якщо $k = \alpha$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$y_ч = e^{\alpha x} Q_n(x) = e^{\alpha x}\left(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n\right),$$

де $A_i,\ i = \overline{0,n}$ – невизначені коефіцієнти;

б) якщо $k = \alpha$ є коренем характеристичного рівняння кратності r, то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$y_ч = x^r e^{\alpha x} Q_n(x) = x^r e^{\alpha x}\left(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n\right),$$

де $A_i,\ i = \overline{0,n}$ – невизначені коефіцієнти.

2. Рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x\right),$$

де α та β – дійсні числа, $P_n(x)$ – многочлен степеня n, $R_m(x)$ – многочлен степеня m.

а) якщо $k = \alpha \pm \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$y_ч = e^{\alpha x}\left(U_l(x)\cos\beta x + V_l(x)\sin\beta x\right),$$

де $U_l(x)$ та $V_l(x)$ – многочлени степеня $l = \max\{n, m\}$ із невизначеними коефіцієнтами.

б) якщо $k = \alpha \pm \beta i$ є коренем характеристичного рівняння кратності r, то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді

$$y_ч = x^r e^{\alpha x}\left(U_l(x)\cos\beta x + V_l(x)\sin\beta x\right),$$

де $U_l(x)$ та $V_l(x)$ – многочлени степеня $l = \max\{n, m\}$ із невизначеними коефіцієнтами.

Щоб знайти невизначені коефіцієнти многочленів, треба підставити функцію $y_ч$ у ЛНДР і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частинах рівняння. При цьому треба прирівнювати відповідні коефіцієнти тих многочленів, що стоять при $\cos\beta x$, і окремо – коефіцієнти многочленів при $\sin\beta x$.

Зауваження 1. Шукані многочлени $Q_n(x),\ U_l(x),\ V_l(x)$ мають бути повними, тобто містити всі степені x від 0 до $n\ (l)$, незалежно від того, чи повними є задані многочлени $P_n(x)$, $R_m(x)$.

Зауваження 2. Якщо права частина рівняння (4.47) є сумою декількох різних за структурою функцій, то для відшукання частинного розв'язку потрібно використати теорему про накладання розв'язків.

Теорема 34 *(про накладання розв'язків).* Якщо права частина рівняння $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ дорівнює сумі двох функцій: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, а $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – розв'язки рівнянь $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$ та $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$, то функція $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$ буде розв'язком даного рівняння.

Зауваження 3. Використаний метод підбору окремого частинного розв'язку рівняння (4.59) можна застосовувати лише для певних диференціальних рівнянь, а саме для лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами і з спеціальною правою частиною. В інших випадках частинний розв'язок треба шукати методом варіацій довільних сталих.

Приклад 4.52. Розв'язати диференціальні рівняння.

а) $y''-2y'+y=2x+3$;

б) $y''+4y=5\sin 2x$.

Розв'язання.

а) Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2-2k+1=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} k_1=1, \\ k_2=1. \end{array}\right.$$

Отже, загальний розв'язок даного однорідного рівняння має вигляд: $y_0=e^x(C_1+C_2x)$.

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Враховуючи, що $f(x)=2x+3=e^{0\cdot x}(2x+3)$, причому $\alpha=0$, $\alpha\neq k_1$, $\alpha\neq k_2$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y_ч=e^{0\cdot x}Q_1(x)=e^{0\cdot x}(A+Bx)=A+Bx$, де A і B – невідомі коефіцієнти. Для їх знаходження знайдемо першу і другу похідні $y_ч$ і підставимо $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ у початкове рівняння.

$$y_ч'=B, \qquad y_ч''=0.$$

$$-2B+A+Bx=2x+3.$$

$$Bx-2B+A=2x+3 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} B=2, \\ -2B+A=3, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=7, \\ B=2. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad y_ч=7+2x.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку однорідного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння, тобто $y=e^x(C_1+C_2x)+7+2x$.

б) Характеристичне рівняння $\mathrm{k}^2+4=0$ має корені $k_{1,2}=\pm 2i$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $\bar{y}=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$. Права частина даного рівняння $f(x)=5\sin 2x=5\sin 2x+0\cdot\cos 2x$ є функцією виду $f(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$, де A=0, B=5, $\beta=2$. Крім того, число $\beta_i=2i$ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, тому згідно з формулою $y^*=x^r(a\cos\beta x+b\sin\beta x)$ частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^*=x(a\cos 2x+b\sin 2x)$$

де a, b – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $(y^*)'$ та $(y^*)''$ і підставивши $(y^*)''$ та y^* в дане рівняння, після спрощень дістанемо

$$-4a\sin 2x+4b\cos 2x=5\sin 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$ в лівій і правій частині цієї рівності, знаходимо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4a = 5; \\ 4b = 0, \end{cases}$$

Звідки $a = -\dfrac{5}{4}, b = 0$. Отже, $y^* = -\dfrac{5}{4}x\cos 2x$ – частинний розв'язок даного рівняння, а $y = \bar{y} + y^* = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \dfrac{5}{4}x\cos 2x$ – загальний розв'язок.

Розв'язування системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Для розв'язання багатьох задач математики, фізики і техніки часто потрібно розглядати декілька невідомих функцій. Знаходження цих функцій може привести до кількох диференціальних рівнянь, які утворюють систему.

Означення. Систему n диференціальних рівнянь 1-го порядку, розв'язаних щодо похідної, вигляду

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, \dots x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots x_n). \end{cases}$$

називають *нормальною системою* диференціальних рівнянь.

Обмежмося розглядом нормальних систем із двома невідомими функціями:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t). \end{cases}$$

Цю систему можна записати у матричному вигляді

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f},$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

Якщо стовпець $\vec{f} = \vec{0}$, то систему називають *однорідною*, інакше – *неоднорідною*.

Означення. *Розв'язком системи диференціальних рівнянь* називають сукупність із двох функцій $x_1(t), x_2(t)$, які справджують кожному з рівнянь цієї системи.

Теорема 35. Якщо функції $a_{ij}(t)$, $f_i(t), i, j = 1,2$, неперервні на відрізку $[a,b]$, то в досить малому околі кожної точки $M_0(t_0; x_{10}; x_{20}), t \in (a;b)$, виконано умови існування та єдності розв'язку задачі Коші.

Якщо стовпці $\vec{x}_1(t)$ та $\vec{x}_2(t)$ є розв'язками лінійної однорідної системи для довільних сталих C_1 та C_2 стовпець $C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t)$ також є розв'язком цієї системи.

Теорема 36. (про структуру розв'язку однорідної системи). Загальним розв'язком нормальної лінійної однорідної системи

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

з неперервними на відрізку $[a,b]$ коефіцієнтами $a_{ij}(t), i, j = 1,2$ є лінійна комбінація двох лінійно незалежних в інтервалі $(a;b)$ розв'язків $\vec{x}_1(t)$, $\vec{x}_2(t)$ системи

$$\vec{x}_{заг.одн.} = C_1\vec{x}_1(t) + C_1\vec{x}_2(t),$$

де $C_1, C_2 = const.$

Шукаємо розв'язок однорідної системи

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

у вигляді

$$\vec{x} = \vec{\gamma}e^{kt}, k \in C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 e^{kt} \\ \gamma_2 e^{kt} \end{pmatrix}$$

Підставляючи ці розв'язки у систему і перетворюючи її, дістанемо

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - k)\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Щоб ця система мала ненульовий розв'язок необхідно й достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Це рівняння називають *характеристичним рівнянням для системи*.

1. Якщо корені характеристичного рівняння k_1 та k_2 дійсні різні, то знаходять відповідні їм нетривіальні розв'язки $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$ алгебраїчної системи і записують загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь у вигляді

$$\vec{x}_{заг.одн.} = C_1\vec{\gamma}_1 e^{k_1 t} + C_2\vec{\gamma}_2 e^{k_2 t}, C_1, C_2 = const.$$

2. Якщо корені характеристичного рівняння k_1 та k_2 комплексно спряжені:

$$k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha + i\beta,$$

то знаходять нетривіальний розв'язок алгебричної системи $\vec{\gamma}$, який відповідає $k_1 = \alpha + i\beta$. Тоді

$$\vec{x}_1(t) = \mathrm{Re}\left(\vec{\gamma}e^{\alpha + i\beta}\right), \quad \vec{x}_2(t) = \mathrm{Im}\left(\vec{\gamma}e^{\alpha - i\beta}\right) \Leftrightarrow$$

$$\vec{x}_{заг.одн.}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t),` C_1, C_2 = const.$$

3. Якщо корені k_1 та k_2 характеристичного рівняння дійсні і рівні, то загальний розв'язок системи шукають у вигляді

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^{kt}, \quad A, B, C, D = const.$$

Нормальну неоднорідну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t). \end{cases}$$

можна звести до одного диференціального рівняння 2-го порядку, виражаючи або змінну $x_2(t)$ із 1-го рівняння системи, або змінну $x_1(t)$ із 2-го рівняння системи.

Приклад 4.53. Розв'язати систему диференціальних рівнянь $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$ методом виключення і матричним методом.

Розв'язання. Це однорідна система лінійних диференціальних рівнянь.

Метод виключення. Виражаємо з другого рівняння x і підставляємо його в перше рівняння. Дістанемо ЛОДР 2-го порядку щодо функції $y(t)$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y' - 3y}{3}, \\ 5x + 8y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{y''}{3} - y', \\ \dfrac{y''}{3} - y' = 5\left(\dfrac{y' - 3y}{3}\right) + 8y. \end{cases}$$

$$y'' - 8y' - 9y = 0;$$

$$k^2 - 8k - 9 = 0;$$

$$k_1 = -1, \quad k_2 = 9;$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}.$$

Знаходимо функцію $x(t)$.

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} + 9C_2 e^{9t};$$

$$x(t) = \frac{y' - 3y}{3} = \frac{-C_1 e^{-t} + 9C_2 e^{9t} - 3C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{9t}}{3} = -\frac{4}{3} C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}.$$

Відповідь. $x = -\dfrac{4}{3} C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}, \quad y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}, \quad C_1, C_2 \in R.$

Матричний метод. Запишемо систему в матричному вигляді:

$$\vec{x}' = A\vec{x},$$

де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$

Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 8 \\ 3 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k^2 - 8k - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} k_1 &= -1, \\ k_2 &= 9. \end{aligned}\right.$$

Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні і різні, то знаходимо власні вектори, які відповідають власним числам.

$$k_1 = -1: \quad \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 6\alpha_1 + 8\beta_1 = 0, \\ 3\alpha_1 + 4\beta_1 = 0. \end{cases}$$

З системи знаходимо $\alpha_1 = -\dfrac{4}{3}\beta_1$ і, отже, вектор $\left(-\dfrac{4}{3};1\right)$ власний, а $x_1 = -\dfrac{4}{3}e^{-t}, \quad y_1 = e^{-t}$ - частинний розв'язок системи.

$$k_1 = 9: \quad \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -4\alpha_2 + 8\beta_2 = 0, \\ 3\alpha_2 - 6\beta_2 = 0. \end{cases}$$

З системи знаходимо $\alpha_2 = 2\beta_2$ і, отже, вектор $(2;1)$ власний, а $x_2 = 2e^{9t}, \quad y_2 = e^{9t}$ - частинний розв'язок системи.

Загальний розв'язок записується через два знайдених лінійно незалежних розв'язки:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{4}{3} C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}, \\ y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}. \end{cases}$$