

## Навчальний модуль №4

### Завдання для самостійної роботи з відповідями

**4.1.** Встановити, чи є множина  $E$  в просторі  $R^3$  а) зв'язною; б) відкритою; в) областю:

1)  $E = \{x^2 + y^2 > 1\}$ .

*Відповідь.* а) так, б) так, в) так.

2)  $E = \{x^2 + y^2 = 1\}$ .

*Відповідь.* а) так, б) ні, в) ні.

3)  $E = \{5x^2 + 12xy - 22x - 12y > 19\}$ .

*Відповідь.* а) ні, б) так, в) ні.

**4.2.** Знайти та зобразити область визначення функції двох змінних:

1)  $z = x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$ ;

2)  $z = \sqrt[3]{-x - y}$ ;

3)  $z = \sqrt{x - y}$ ;

4)  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ;

5)  $z = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$ ;

6)  $z = \ln(36 - x^2 - y^2)$ ;

7)  $z = \ln x + \ln y$ ;

8)  $z = \ln \frac{x}{y}$ ;

9)  $z = \sqrt{1 - x^2} + 17\sqrt{1 - y^2} + \cos x$ ;

10)  $z = \ln(16 - x^2 - y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$ ;

11)  $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$ ;

12)  $z = \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x - y^2}}$ ;

13)  $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$ ;

14)  $z = \operatorname{ctg} \pi(x + y)$ .

*Відповіді:* **1)**  $D(z)$  – множина всіх точок площини; **2)**  $D(z)$  – множина всіх точок площини; **3)**  $D(z)$ :  $y \leq x$ . Півплощина під прямою  $y = x$  з дорученням точок прямої; **4)**  $D(z)$ :  $|y| \leq |x|$ . Внутрішня частина правого та лівого вертикальних кутів, утворених прямими  $y = x$  та  $y = -x$  з дорученням точок цих прямих; **5)**  $D(z)$  – множина всіх точок I і IV чвертей, які лежать в куті, утвореного прямими  $y = x$  і  $y = -x$  з дорученням точок цих прямих; **6)**  $D(z)$ :  $x^2 + y^2 < 36$ . Круг радіуса  $R = 6$  з центром у початку координат, за винятком точок контура; **7)**  $D(z)$  – співпадає з множиною точок I координатної чверті; **8)**  $D(z)$  – внутрішні точки першого та третього координатних кутів; **9)**  $D(z)$  – квадрат, що розміщується між лініями  $x = \pm 1$  та  $y = \pm 1$ ; **10)**  $D(z)$  – множина всіх точок, яка є кільцем між колами з центром в точці  $O(0;0)$  і радіусами 4 та 2; **11)**  $D(z)$  – множина всіх точок кола  $x^2 + y^2 = 25$ ; **12)**  $D(z)$  – частина площини між параболою  $y^2 = x$  та колом  $x^2 + y^2 = 1$  всередині параболи з вилученням точок параболи і кола; **13)**  $D(z)$ :  $\left| \frac{y-1}{x} \right| \leq 1, x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \leq y \leq 1+x & (x > 0), \\ 1+x \leq y \leq 1-x & (x < 0). \end{cases}$  Внутрішня частина правого і лівого вертикальних кутів, утворених прямими  $y = 1+x$  і  $y = 1-x$ , з дорученням точок цих прямих, але без точки їх перетину; **14)**  $D(z)$  – уся площина, за винятком прямих  $y + x = n, n = 0, \pm 1, \dots$

**4.3.** Знайдіть:

1)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy + 9}}$ .

*Відповідь.* -6.

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy^2)}{3x}. \quad \text{Відповідь. } \frac{4}{3}.$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left( \frac{x+y}{x} \right)^{3x}. \quad \text{Відповідь. } 1.$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x+y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}. \quad \text{Відповідь. } 0.$$

$$5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}. \quad \text{Відповідь. } e.$$

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2}. \quad \text{Відповідь. } 1.$$

$$7) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{\operatorname{tg}(x+y)e^{x-y}}{x^2-y^2}. \quad \text{Відповідь. } \frac{e^2}{2}.$$

$$8) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 5}} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}}. \quad \text{Відповідь. } e^3.$$

#### 4.4. Знайдіть точки розриву функції:

$$1) z = x \sin \frac{y^2}{x^2+y^2}. \quad \text{Відповідь. Точка розриву } (0; 0).$$

$$2) z = \frac{xy - 2x - y + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}. \quad \text{Відповідь. Точка розриву } (1; 2).$$

$$3) z = e^{\frac{2}{x^2-y^2}}. \quad \text{Відповідь. Лінії розриву – прямі } y = \pm x.$$

$$4) z = \frac{1}{y-x^2}. \quad \text{Відповідь. Лінія розриву – парабола } y = x^2.$$

$$5) z = \frac{1}{x^2 - y^2 - 1}. \quad \text{Відповідь. Лінія розриву – гіпербола } x^2 - y^2 = 1.$$

$$6) u = \frac{1}{xyz}. \quad \text{Відповідь. Поверхні розриву – площини } x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$7) u = \frac{1}{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2}. \quad \text{Відповідь. Точка розриву } (1; -1; 0).$$

$$8) u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2 - 1}. \quad \text{Відповідь. Поверхня розриву – однопорожнинний гіперболоїд } x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0.$$

#### 4.5. Знайти частинні похідні першого порядку.

$$1) z = xy^3 + 3x^4y^5 + 10y^4. \quad \text{Відповідь. } z'_x = y^3 + 12x^3y^5; \quad z'_y = 3xy^2 + 15x^4y^4 + 40y^3.$$

$$2) z = xy - \frac{y}{x} + 3x + 2y - 2. \quad \text{Відповідь. } z'_x = y + \frac{y}{x^2} + 3; \quad z'_y = x - \frac{1}{x} + 2.$$

- 3)  $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ .      Відповідь.  $z'_x = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}$ ;  $z'_y = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}$ .
- 4)  $z = \frac{xy^2}{x^3 + y^2}$ .      Відповідь.  $z'_x = \frac{y^4 - 2x^3y^2}{(x^3 + y^2)^2}$ ;  $z'_y = \frac{2x^4y}{(x^3 + y^2)^2}$ .
- 5)  $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ .      Відповідь.  $z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ;  $z'_y = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$ .
- 6)  $z = \arcsin \frac{x+y}{xy}$ .      Відповідь.  $z'_x = -\frac{y}{x\sqrt{x^2y^2 - (x+y)^2}}$ ;  $z'_y = -\frac{x}{y\sqrt{x^2y^2 - (x+y)^2}}$ .
- 7)  $z = e^{-\frac{x}{y}}$ .      Відповідь.  $z'_x = -\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$ ;  $z'_y = \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$ .
- 8)  $z = xy \ln(x+y)$ .      Відповідь.  $z'_x = y \ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$ ;  $z'_y = x \ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$ .
- 9)  $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$ .      Відповідь.  $z'_x = \sqrt{y} - \frac{y}{3x^2\sqrt[3]{x}}$ ;  $z'_y = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ .
- 10)  $u = xy + yz + zx$ .      Відповідь.  $u'_x = y + z$ ;  $u'_y = x + z$ ;  $u'_z = y + x$ .
- 11)  $u = \frac{z}{x} + \frac{x}{z}$ .      Відповідь.  $u'_x = -\frac{z}{x^2} + \frac{1}{z}$ ;  $u'_z = \frac{1}{x} - \frac{x}{z^2}$ .
- 12)  $u = x^{yz}$ .      Відповідь.  $u'_x = yz \cdot x^{yz-1}$ ;  $u'_y = z \cdot x^{yz} \ln x$ ;  $u'_z = y \cdot x^{yz} \ln x$ .

#### 4.6. Знайти повний диференціал функції:

- 1)  $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x$ .      Відповідь.  $dz = (2xy^4 - 3x^2y^3 + 1)dx + (4x^2y^3 - 3x^3y^2)dy$ .
- 2)  $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ .      Відповідь.  $dz = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy$ .
- 3)  $z = \sin xy$ .      Відповідь.  $dz = y \cos(xy) dx + x \cos(xy) dy$ .
- 4)  $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ .      Відповідь.  $dz = \frac{y^2 + 1}{1 + x^2y^2 + x^2 + y^2} dx + \frac{x^2 + 1}{1 + x^2y^2 + x^2 + y^2} dy$ .
- 5)  $z = \sin(x^3 + y^3)$ .      Відповідь.  $dz = 3x^2 \cos(x^3 + y^3) dx + 3y^2 \cos(x^3 + y^3) dy$ .
- 6)  $z = e^{-xy} \cos xy$ .      Відповідь.  $dz = ye^{-xy} \cos(xy - \sin xy) dx + xe^{-xy} \cos(xy - \sin xy) dy$ .

#### 4.7. Знайти повний диференціал функції $z = f(x; y)$ у заданій точці, якщо:

- 1)  $z = \frac{x}{y^2}$ ,  $M(1; 1)$ .      Відповідь.  $dz(M) = dx - 2dy$ .
- 2)  $z = \frac{x+y}{x-y}$ ,  $M(3; 2)$ .      Відповідь.  $dz(M) = -4dx - 6dy$ .
- 3)  $z = \arcsin(x + y^3)$ ,  $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ .      Відповідь.  $dz(M) = \frac{6}{\pi} dx$ .
- 4)  $u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)$ ,  $M(1; 1; 1)$ .      Відповідь.  $dz(M) = 2dx + \ln 4 dz$ .
- 5)  $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $M(3; 4; 5)$ .      Відповідь.  $dz(M) = -\frac{3}{25} dx - \frac{4}{25} dy + \frac{1}{5} dz$ .

**4.8.** Знайдіть  $\frac{dz}{dt}$ , якщо:

1)  $z = e^{x-2y}$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = t^3$ .

Відповідь.  $e^{x-2y}(\cos t - 6t^2)$ .

2)  $z = \arcsin(x - y)$ ,  $x = 3t$ ,  $y = 4t^3$ .

Відповідь.  $\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$ .

3)  $z = xy$ ,  $x = t^2 + 1$ ,  $y = \ln 4t$ .

Відповідь.  $2t \cdot \ln 4t + \frac{t^2 + 1}{t}$ .

4)  $z = \frac{y}{x}$ ,  $x = e^{3t}$ ,  $y = \arctg t$ .

Відповідь.  $\frac{e^{3t} \cdot (3(1+t^2) \cdot \arctg t - 1)}{(1+t^2) \cdot \arctg^2 t}$ .

5)  $z = \arctg \frac{x}{y}$ ,  $x = 3t + 2$ ,  $y = 3t^2 - 1$ .

Відповідь.  $\frac{-9t^2 - 12t - 3}{9t^4 + 3t^2 + 12t + 5}$ .

**4.9.** Знайдіть  $\frac{dz}{dx}$ , якщо:

1)  $z = \ln \frac{x}{y}$ , де  $y = x^3 + 1$ .

Відповідь.  $\frac{1-2x^3}{x(x^3+1)}$ .

2)  $z = \ln(e^x + e^y)$ , де  $y = x^3$ .

Відповідь.  $\frac{e^x + 3e^{x^3} \cdot x^2}{e^x + e^{x^3}}$ .

3)  $z = \arcsin \frac{x}{y}$ , де  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ .

Відповідь.  $\frac{1}{1+x^2}$ .

4)  $z = \arctg(xy)$ , де  $y = e^x$ .

Відповідь.  $\frac{e^x(x+1)}{1+x^2e^{2x}}$ .

5)  $z = \arctg \frac{y}{x}$ , де  $y = x^2$ .

Відповідь.  $\frac{1}{1+x^2}$ .

**4.10.** Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$  та  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , якщо:

1)  $z = x^2 y - y^2 x$ , де  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ .

Відповідь.  $\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2 \sin v \cos v (\cos v - \sin v)$ ;  $\frac{\partial z}{\partial v} = u^3 (\sin v + \cos v) \left(1 - \frac{3}{2} \sin 2v\right)$ .

2)  $z = x^2 \ln y$ , де  $x = \frac{u}{v}$ ,  $y = 3u - 2v$ .

Відповідь.  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{v^2} \ln(3u - 2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u - 2v)}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{2u^2}{v^3} \ln(3u - 2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u - 2v)}$ .

3)  $z = \ln(x^2 + y^2)$ , де  $x = uv$ ,  $y = \frac{u}{v}$ .

Відповідь.  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2}{u}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2(v^4 - 1)}{v(v^4 + 1)}$ .

4)  $z = x^2 \cdot \ln y$ , де  $x = \frac{v}{u}$ ,  $y = u^2 + v^2$ .

Відповідь.  $\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{2v^2}{u^3} \ln(u^2 + v^2) + \frac{2v^2}{u(u^2 + v^2)}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{u^2} \ln(u^2 + v^2) + \frac{2v^3}{u^2(u^2 + v^2)}$ .

5)  $z = x^2 y^2$ , де  $x = ue^v$ ,  $y = ve^u$ .

Відповідь.  $\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv^2(1+u)e^{2(u+v)}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial v} = 2u^2v(1+v)e^{2(u+v)}$ .

**4.11.** Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$  від функцій, заданих неявно.

1)  $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = a^2$ .

Відповідь.  $-\frac{x}{y}$ .

2)  $x^2y + xy^2 - y^3 - 1 = 0$ .

Відповідь.  $\frac{2xy + y^2}{3y^2 - x^2 - 2xy}$ .

3)  $y \sin x - \cos(x - y) = 0$ .

Відповідь.  $\frac{y \cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x}$ .

**4.12.** Знайти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від функцій, заданих неявно.

1)  $x + y + z = e^z$ .

Відповідь.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1 - e^z}$ .

2)  $z^3 + 3xyz = a^3$ .

Відповідь.  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz}{xy + z^2}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{xy + z^2}$ .

3)  $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$ .

Відповідь.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 - x}{z + 1}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z + 1}$ .

4)  $\sin z + e^{xyz} - 1 = 0$ .

Відповідь.  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yze^{xyz}}{\cos z + xye^{xyz}}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xze^{xyz}}{\cos z + xye^{xyz}}$ .

5)  $x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1 = 0$ .

Відповідь.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}$ .

**4.13.** Знайти  $d^2z$ , якщо:

1)  $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$ .

Відповідь.  $d^2z = 6x dx^2 + 2(2y - 15y^2) dx dy + (2x - 3 - xy + 20y^3) dy^2$ .

2)  $z = (x + y)e^{xy}$ .

Відповідь.  $d^2z = e^{xy}(y(y^2 + xy + 2) dx^2 + 2(x + y)(xy + 2) dx dy + x(x^2 + xy + 2) dy^2)$ .

3)  $z = x^3 + 3x^2y - y^3$ .

Відповідь.  $d^2z = (6x + 6y) dx^2 + 12x dx dy - 6y dy^2$ .

4)  $z = \arcsin(xy)$ .

Відповідь.  $d^2z = \frac{xy^3 dx^2 + 2 dx dy + x_3 y dy^2}{\sqrt{(1 - x^2 y^2)^3}}$ .

5)  $z = x \ln \frac{y}{x}$ .

Відповідь.  $d^2z = -\frac{1}{x} dx^2 + \frac{2}{y} dx dy - \frac{x}{y^2} dy^2$ .

**4.14.** Знайдіть вказані похідні:

1)  $\frac{\partial^5 z}{\partial x \partial y^4}$ , якщо  $z = xe^{-y}$ .

Відповідь.  $e^{-y}$ .

2)  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ , якщо  $z = \ln(x^2 + y^2)$ .

Відповідь.  $\frac{4y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$ .

3)  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ , якщо  $z = \sin xy$ .

Відповідь.  $-2x \sin xy - x^2 y \cos xy$ .

4)  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ , якщо  $z = e^{xy^2}$ .

Відповідь.  $2y^3(2 + xy^2)e^{xy^2}$ .

5)  $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$ , якщо  $z = \sin(4x + 2y)$ .

Відповідь.  $64 \sin(4x + 2y)$ .

**4.15.** Знайти похідну функції  $u$  в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{l}$ .

- 1)  $u = x^2 - xy + y^2$ ,  $M(1;1)$ ,  $\vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ . Відповідь.  $\frac{7}{5}$ .
- 2)  $u = \arctg(xy)$ ,  $M(1;1)$ ,  $\vec{l} = (1;1)$ . Відповідь.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .
- 3)  $u = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ ,  $M(3;1)$ ,  $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ , де  $N(6;5)$ . Відповідь. 0.
- 4)  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $M(2;3;6)$ ,  $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ . Відповідь.  $-\frac{4}{21}$ .
- 5)  $u = x + \ln(y^2 + z^2)$ ,  $M(2;1;1)$ ,  $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Відповідь. 0.

**4.16.** Знайти градієнт функції  $u$  у точці  $M$ .

- 1)  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $M(1;1;-1)$ . Відповідь.  $\frac{2}{3}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ .
- 2)  $u = \sqrt{2xy + y^2}$ ,  $M(3;2)$ . Відповідь.  $\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{5}{4}\vec{j}$ .
- 3)  $u = \arctg(xy)$ ,  $M(1;1)$ . Відповідь.  $\frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ .
- 4)  $u = x^2 - 2xy + 3y - 1$ ,  $M(1;2)$ . Відповідь.  $-2\vec{i} + \vec{j}$ .
- 5)  $u = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $M(2;-2;1)$ . Відповідь.  $4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ .

**4.17.** Знайти величину градієнта функції  $u = f(x; y)$  у точці  $M$ .

- 1)  $u = x^2 + y^2$ ,  $M(3;2)$ . Відповідь.  $2\sqrt{13}$ .
- 2)  $u = \sqrt{x^2 - y^2}$ ,  $M(5;3)$ . Відповідь.  $\frac{\sqrt{34}}{4}$ .
- 3)  $u = \arctg \frac{x}{y}$ ,  $M(1;1)$ . Відповідь.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- 4)  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  у точці  $M(-2;2;1)$ . Відповідь. 1.

**4.18.** Знайти кут між градієнтами функції  $z = f(x; y)$  у точках  $A$  і  $B$ , якщо:

- 1)  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $A(1;1)$ ,  $B(1;-1)$ . Відповідь.  $\frac{\pi}{2}$ .
- 2)  $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$ ,  $A(1;1)$ ,  $B(3;4)$ . Відповідь.  $\cos \alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ .
- 3)  $z = xy$ ,  $A(3;4)$ ,  $B(-4;3)$ . Відповідь.  $\frac{\pi}{2}$ .

**4.19.** Знайти абсолютну величину і напрям градієнта функції  $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  у точці

$M(x_0, y_0, z_0)$ .

Відповідь.  $|\overrightarrow{\text{grad}u}|_M = \frac{1}{r_0^2}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{x_0}{r_0}$ ,  $\cos \beta = -\frac{y_0}{r_0}$ ,  $\cos \gamma = -\frac{z_0}{r_0}$ ,  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ .

**4.20.** Знайдіть найбільше значення  $\frac{\partial u}{\partial l}$  у точці  $M_0$ , якщо:

1)  $u = xy^2 - 3x^4y^5$ ,  $M_0(1;1)$ . Відповідь.  $\sqrt{290}$ .

2)  $u = \frac{x + \sqrt{y}}{y}$ ,  $M_0(2;1)$ . Відповідь.  $\frac{\sqrt{29}}{2}$ .

3)  $u = \ln xyz$ ,  $M_0(1;-2;-3)$ . Відповідь.  $\frac{7}{6}$ .

4)  $u = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - \sin^3 y + 2z + \operatorname{ctg} z$ ,  $M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Відповідь.  $\frac{\sqrt{137}}{8}$ .

**4.21.** Записати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці  $M_0$ .

1)  $z = 2x^2 - 4y^2$ ,  $M_0(2;1;4)$ . Відповідь.  $8x - 8y - z = 4$ ,  $\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{-1}$ .

2)  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $M_0(0;1;0)$ . Відповідь.  $y - z = 1$ ,  $\frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$ .

3)  $z = e^{x \cos y}$ ,  $M_0(1;0;e)$ . Відповідь.  $ex - z = 0$ ,  $\frac{x-1}{e} = \frac{y}{0} = \frac{z-e}{-1}$ .

4)  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $M_0(1;-2;-2)$ . Відповідь.  $x - 2y + 2z = 9$ ,  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+2}{2}$ .

5)  $\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$ ,  $M_0(3;-2;-1)$ . Відповідь.  $2x - 3y - 6z = 18$ ,  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+1}{-6}$ .

**4.22.** Знайти екстремум функцій.

1)  $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$ . Відповідь.  $z_{\min}(1;0) = -1$ .

2)  $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$ . Відповідь.  $z_{\max}(0;0) = 10$ .

3)  $z = x^3 - 6xy + 8y^3 + 1$ . Відповідь.  $z_{\max}(0;0) = 10$ .

4)  $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y + 3$ . Відповідь. екстремуму немає.

5)  $z = xy^2(1 - x - y)$ , ( $x > 0$ ;  $y > 0$ ). Відповідь.  $z_{\max}\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}$ .

6)  $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$ . Відповідь.  $z_{\min}(1;2) = 7 - 10\ln 2$ .

**4.23.** Знайти точки умовного екстремуму функцій.

1)  $z = xy^2$  при  $x + 2y = 1$ . Відповідь.  $z_{\min}(1;0) = 0$ ,  $z_{\max}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$ .

2)  $z = xy$  при  $x + y = 1$ . Відповідь.  $z_{\max}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ .

3)  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  при  $x + y = 2$ . Відповідь.  $z_{\min}(1;1) = 2$ .

4)  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$  при  $x + y + 3 = 0$ . Відповідь.  $z_{\min}\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{4}$ .

5)  $z = 2x + y$  при  $x^2 + y^2 = 1$ . Відповідь.  $z_{\min}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$ ,  $z_{\max}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$ .

**4.24.** Знайти найбільше і найменше значення функцій в замкненій області  $D$ .

1)  $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$  у замкненій області, що обмежена прямими  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $2x + 3y - 12 = 0$ .

*Відповідь.*  $z_{\text{найб}} = 16$ ,  $z_{\text{найм}} = -\frac{16}{3}$ .

2)  $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$  в області  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

*Відповідь.*  $z_{\text{найб}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,  $z_{\text{найм}} = 0$ .

3)  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$  у прямокутнику, обмеженому прямими  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2$ .

*Відповідь.*  $z_{\text{найб}}(1;2) = 17$ ,  $z_{\text{найм}}(1;0) = -3$ .

4)  $z = x^2 + 2xy - 1$  в області, обмеженій лініями  $y = 0$  та  $y = x^2 - 4$ .

*Відповідь.*  $z_{\text{найб}}\left(-\frac{4}{3}; -\frac{20}{9}\right) = \frac{181}{27}$ ,  $z_{\text{найм}}(1;-3) = -6$ .

5)  $z = xy$  у колі  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

*Відповідь.*  $z_{\text{найб}} = -\frac{1}{2}$ ,  $z_{\text{найм}} = \frac{1}{2}$ .

**4.25.** Знайти розміри прямокутного паралелепіпеда, що має максимальний об'єм при заданій повній поверхні  $S$ .

*Відповідь.*  $x = y = z$ ,  $V_{\text{max}} = \frac{S}{6} \sqrt{\frac{S}{6}}$ .

**4.26.** Розв'язати диференціальні рівняння:

1)  $y' = \frac{2y}{x^3}$ .

*Відповідь.*  $y = Ce^{\frac{-1}{x^2}}$ .

2)  $(1 + x^2)y' + 1 + y^2 = 0$ .

*Відповідь.*  $y = \frac{C - x}{1 + Cx}$ .

3)  $(y - 1)dx + (x + 1)dy = 0$ .

*Відповідь.*  $y = \frac{C}{x + 1} + 1$ .

4)  $2x\sqrt{1 - y^2} = y'(1 + x^2)$ .

*Відповідь.*  $\arcsin y - \ln(1 + x^2) = C$ .

5)  $(x + 1)dx + (y - 1)dy = 0$ .

*Відповідь.*  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = C$ .

6)  $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ .

*Відповідь.*  $y = \ln|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$ .

7)  $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ .

*Відповідь.*  $y^2 = Cxe^{-y/x}$ .

8)  $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$ .

*Відповідь.*  $y^2 = Cx^3 + x^2$ .

9)  $x^2y' = y^2 + xy$ .

*Відповідь.*  $y = x(C - \ln|x|)$ .

10)  $y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$ .

*Відповідь.*  $(x - y - 1)^3 = C(x - y + 3)$ .

11)  $y' - \frac{3y}{x} = x$ .

*Відповідь.*  $y = Cx^3 - x^2$ .



- 12)  $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$ .      *Відповідь.*  $y = \frac{C - \cos 2x}{2 \cos x}$ .
- 13)  $y' - \frac{y}{x} = (x-2)^2$ .      *Відповідь.*  $y = Cx + \frac{x^3}{2} - 4x^2 + 4x \ln|x|$ .
- 14)  $y' = x + y$ .      *Відповідь.*  $y = Ce^x - x - 1$ .
- 15)  $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$ .      *Відповідь.*  $y = \frac{1}{2x^2} (C - e^{-x^2})$ .
- 16)  $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$ .      *Відповідь.*  $y^2 = e^{x^2} (2x + C)^{-1}$ .
- 17)  $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$ .      *Відповідь.*  $2\sqrt{y} = x^2 \ln|x| + Cx^2$ .
- 18)  $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$ .      *Відповідь.*  $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$ .
- 19)  $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0$ .      *Відповідь.*  $x^y = C$ .
- 20)  $\left(\frac{y}{x^2 - y^2} - 1\right)dx - \frac{x dy}{x^2 + y^2} = 0$ .      *Відповідь.*  $x + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$ .

**4.27.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння і частинний його розв'язок, який проходить через точку  $M(2;4)$ .

- 1)  $y' = y$ .      *Відповідь.*  $y = Ce^x, y = 4e^{x-2}$ .
- 2)  $y'x = -y$ .      *Відповідь.*  $y = \frac{C}{x}, y = \frac{8}{x}$ .
- 3)  $y' = x$ .      *Відповідь.*  $y = \frac{x^2}{2} + C, y = \frac{x^2}{2} + 2$ .
- 4)  $(4-x)y' = 1 + 2y$ .      *Відповідь.*  $y = \left(\frac{C}{4-x}\right)^2 - \frac{1}{2}, y = \frac{18}{(4-x)^2} - \frac{1}{2}$ .
- 5)  $(1+x^2)y' = 1 + y^2$ .      *Відповідь.*  $y = \frac{x+C}{1-Cx}, y = \frac{9x+2}{9-2x}$ .

**4.28.** Розв'яжіть задачу Коші:

- 1)  $dy + y \operatorname{tg} x dx = 0, y(\pi) = 2$ .      *Відповідь.*  $y = -2 \cos x$ .
- 2)  $y' = 8\sqrt{y}, y(0) = 4$ .      *Відповідь.*  $y = (4x + 2)^2$ .
- 3)  $y' = \frac{x^2 + 9}{y^2 + 1}, y(0) = 1$ .      *Відповідь.*  $y^3 + 3y = x^3 + 27x + 4$ .
- 4)  $y' = 3\frac{y^2 + 1}{x^2 + 9}, y(3) = -\frac{5}{7}$ .      *Відповідь.*  $y = \frac{1}{6} - \frac{37}{12x + 6}$ .
- 5)  $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}, y(-1) = 1$ .      *Відповідь.*  $y = 2x(1 - 3x^2)^{-1}$ .
- 6)  $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - x dy = 0, y(1) = 0$ .      *Відповідь.*  $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ .
- 7)  $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 0$ .      *Відповідь.*  $y = \frac{x}{\cos x}$ .

**4.29.** Розв'яжіть диференціальні рівняння.

1)  $y'' = x + \sin x$ . *Відповідь.*  $y = \frac{x^3}{3} - \sin x + C_1x + C_2$ .

2)  $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$ . *Відповідь.*  $y = C_1x + C_2 - \ln \cos x$ .

3)  $y'' + 2xy'^2 = 0$ . *Відповідь.*  $y = \frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{x}{C_1} + C_2$ .

4)  $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$ . *Відповідь.*  $y = C_2 - C_1 \cos x - x$ .

5)  $y''x \ln x = y'$ . *Відповідь.*  $y = C_1x(\ln x - 1) + C_2$ .

6)  $x^3y'' + x^2y' = 1$ . *Відповідь.*  $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln x + C_2$ .

7)  $xy'' - y' = e^x x^2$ . *Відповідь.*  $y = e^x(x - 1) + C_1x^2 + C_2$ .

6)  $(y'')^2 = 4y'$ . *Відповідь.*  $y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2$ .

9)  $y'' + 2y(y')^3 = 0$ . *Відповідь.*  $y^3 + C_1y + C_2 = 3x$ .

10)  $yy'' = -(y')^3$ . *Відповідь.*  $y \ln|y| + C_1y = x + C_2$ .

**4.30.** Розв'яжіть задачу Коші:

1)  $y'' = xe^x$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ . *Відповідь.*  $y = (x - 2)e^x + x + 2$ .

2)  $y''(x^2 + 1) = 2xy'$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ . *Відповідь.*  $y = x^3 + 3x + 1$ .

3)  $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$ ,  $y(2) = 0$ ,  $y'(2) = 4$ . *Відповідь.*  $y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}$ .

4)  $y^3y'' = -1$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 0$ . *Відповідь.*  $y = \sqrt{2x - x^2}$ .

**4.31.** Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння.

1)  $y'' - 2y' - 3y = 0$ . *Відповідь.*  $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$ .

2)  $y'' - 9y = 0$ . *Відповідь.*  $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$ .

3)  $y'' - 4y' = 0$ . *Відповідь.*  $y = C_1e^{4x} + C_2$ .

4)  $y'' + 4y' + 4y = 0$ . *Відповідь.*  $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$ .

5)  $y'' - 2y' + y = 0$ . *Відповідь.*  $y = e^x(C_1 + C_2x)$ .

6)  $y'' + 9y = 0$ . *Відповідь.*  $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ .

7)  $y'' + 2y' + 5y = 0$ . *Відповідь.*  $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ .

8)  $4y'' - 8y' + 5y = 0$ . *Відповідь.*  $y = e^x \left( C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2} \right)$ .

9)  $4y^{iv} - 3y'' - y = 0$ . *Відповідь.*  $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos \frac{x}{2} + C_4 \sin \frac{x}{2}$ .

10)  $y^{iv} - 16y = 0$ . *Відповідь.*  $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$ .

**4.32.** Розв'яжіть задачу Коші:

1)  $y'' - 4y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 6$ ,  $y'(0) = 10$ . *Відповідь.*  $y = 4e^x + 2e^{3x}$ .

2)  $y'' + 4y' = 0$ ,  $y(0) = 7$ ,  $y'(0) = 8$ . *Відповідь.*  $y = 9 - 2e^{-4x}$ .

3)  $4y'' - 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0.$  *Відповідь.*  $y = e^{-\frac{x}{2}}(2 + x).$

4)  $y'' + 4y' + 29y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 15.$  *Відповідь.*  $y = 3e^{-2x} \sin 5x.$

**4.33.** Складіть ЛОДР, знаючи їхні характеристичні рівняння:

1)  $9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0.$  *Відповідь.*  $9y'' - 6y' + y = 0.$

2)  $\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0.$  *Відповідь.*  $y''' - 3y'' + 2y' = 0.$

**4.34.** Складіть ЛОДР, якщо відомі корені характеристичних рівнянь, і запишіть їхні загальні розв'язки:

1)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$  *Відповідь.*  $y'' - 3y' + 2y = 0, y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$

2)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.$  *Відповідь.*  $y'' - 2y' + y = 0, y = (C_1 + C_2 x)e^x.$

3)  $\lambda_1 = 3 - 2i, \lambda_2 = 3 + 2i.$  *Відповідь.*  $y'' - 6y' + 13y = 0, y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$

**4.35.** Визначити і записати структуру частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння по вигляду функції  $f(x)$ .

1)  $y'' + 6y' - 7y = f(x):$

а)  $f(x) = e^x$ ; б)  $f(x) = 3e^{2x} + x^2$ ; в)  $f(x) = 2xe^x$ ; г)  $f(x) = x^2 e^{-7x}.$

*Відповідь.* а)  $y = Axe^x$ ; б)  $y = Ae^{2x} + Bx^2 + Cx + D$ ; в)  $y = (Ax + B)xe^x$ ; г)  $y = (Ax^2 + Bx + C)xe^{-7x}.$

2)  $y'' + 10y' + 25y = f(x):$

а)  $f(x) = e^{-5x}$ ; б)  $f(x) = e^{5x} + x$ ; в)  $f(x) = \cos 5x$ ; г)  $f(x) = xe^{-5x}.$

*Відповідь.* а)  $y = Ax^2 e^{-5x}$ ; б)  $y = Ae^{5x} + Bx + C$ ; в)  $y = A \sin 5x + B \cos 5x$ ; г)  $y = x^2(Ax + B)e^{-5x}.$

3)  $y'' + 10y' + 26y = f(x):$

а)  $f(x) = xe^{-5x}$ ; б)  $f(x) = \cos x$ ; в)  $f(x) = xe^{-5x} \sin x$ ; г)  $f(x) = x + e^{5x}.$

*Відповідь.* а)  $y = (Ax + B)e^{-5x}$ ; б)  $y = A \sin x + B \cos x$ ; в)  $y = x[(Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x]e^{-5x}$ ;  
г)  $y = Ax + B + Ce^{5x}.$

**4.36.** Знайдіть загальні розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1)  $y'' - 4y = 8x^3.$  *Відповідь.*  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^3 - 3x.$

2)  $y'' - 2y' = x^2 - x.$  *Відповідь.*  $y = C_1 + C_2 e^{2x} - x^3 / 6.$

3)  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}.$  *Відповідь.*  $y = (C_1 + C_2 x + 0,5x^2)e^{-2x}.$

4)  $y'' + y' - 2y = 6x^2.$  *Відповідь.*  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 3(x^2 + x + 1,5).$

5)  $4y'' - y = x^3 - 24x.$  *Відповідь.*  $y = C_1 e^{0,5x} + C_2 e^{-0,5x} - x^3.$

6)  $y'' + 16y = 8 \cos 4x.$  *Відповідь.*  $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + x \sin 4x.$

7)  $4y'' + 3y' - y = 11 \cos x - 7 \sin x$  *Відповідь.*  $y = C_1 e^{\frac{1}{4}x} + C_2 e^{-x} + 2 \sin x - \cos x.$

8)  $y''' - y'' = 6x + e^{-x}.$  *Відповідь.*  $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + xe^{-x} + x^3 - 3x^2.$

9)  $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}.$  *Відповідь.*  $y = \frac{1}{2}e^{-x} + xe^{-2x} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$

**4.37.** Розв'яжіть задачу Коші:

1)  $y'' - 2y' + y = -2 + x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

*Відповідь.*  $y = x(1 - e^{-x})$ .

2)  $y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 6$ .

*Відповідь.*  $y = e^x \sin 6x(1 + 3x)$ .

3)  $y'' - 4y = 8e^{2x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -8$ .

*Відповідь.*  $y = 3e^{-2x} + 2e^{2x}(x - 1)$ .

**4.38.** Знайдіть загальні розв'язки диференціальних рівнянь.

1)  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$ .

*Відповідь.*  $y = \left(C_1 - \frac{x}{2}\right) \cos 2x + \left(C_2 + \frac{1}{4} \cdot \ln|\sin 2x|\right) \sin 2x$ .

2)  $y'' + y' = \frac{1}{1 + e^x}$ .

*Відповідь.*  $y = C_1 + C_2 e^{-x} - (1 + e^{-x}) \ln(1 + e^x) + x$ .

3)  $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$ .

*Відповідь.*  $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2 \cos x}$ .

4)  $y'' + 4y = -\operatorname{ctg}^2 2x$

*Відповідь.*  $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x \cdot \ln|\operatorname{tg} x|$ .

**4.39.** Знайдіть загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

1) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

*Відповідь.* 
$$\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}, \\ y = -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t}; \end{cases}$$

2) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

*Відповідь.* 
$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t}, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}; \end{cases}$$

3) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + 40e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + 10e^{-2t}. \end{cases}$$

*Відповідь.* 
$$\begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t} + 7e^t + 2e^{-2t}, \\ y = \frac{1}{2} C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t} + e^t + 3e^{-2t}. \end{cases}$$

4) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 3y + 20 \sin 2t. \end{cases}$$

*Відповідь.* 
$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-4t} - \sin 2t - 2 \cos 2t, \\ y = C_1 - 3C_2 e^{-4t} + 3 \sin 2t - 4 \cos 2t. \end{cases}$$

**4.40.** Розв'яжіть задачу Коші:

1) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, & x(0) = 3, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y, & y(0) = 2. \end{cases}$$

*Відповідь.* 
$$\begin{cases} x = 2 + e^{7t}, \\ y = -1 + 3e^{7t}; \end{cases}$$

2) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, & x(0) = -2, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y, & y(0) = 4. \end{cases}$$

*Відповідь.* 
$$\begin{cases} x = -3e^{2t} + e^{4t}, \\ y = 3e^{2t} + e^{4t}; \end{cases}$$