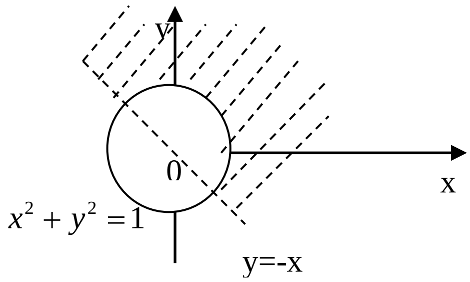
Диференціальне числення функцій декількох змінних.

Приклад 7-1. Знайдіть і зобразіть на координатній площині область визначення функції $z=\sqrt{\log_{a^2}(x^2+y^2)}+\ln(x+y), \quad a^2>1.$

Розв'язання. Областю визначення функції є множина точок площини, для яких визначено вираз $z=\sqrt{\log_{a^2}(x^2+y^2)}+\ln(x+y),$ тобто

$$\begin{cases}\log_{a^2}(x^2+y^2)\ge 0\\ x+y>0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2\ge 1\\ y>-x.\end{cases}$$



Приклад 7-2. Обчисліть повний диференціал функції $u=\arcsin\left(x\sqrt{y}\right)-yz^2$ у точці M(0;4;1).

Розв'язання. Повний диференціал функції знаходять за формулою

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Знайдемо частинні похідні і обчислимо їх значення у точці M.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left.\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2y}}\right|_{M}=2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\left.\left(\frac{x}{2\sqrt{y}\sqrt{1-x^2y}}-z^2\right)\right|_{M}=-1, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-2yz\Big|_{M}=8.$$

Тоді $du(M)=2dx-dy-8dz.$

Приклад 7-3. Обчисліть значення похідної $\frac{du}{dt}$ складеної функції $u=x^y$ у точці M(e; 0), якщо $\begin{cases}x=e^t,\\ y=\ln t.\end{cases}$

Розв'язання. Для знаходження похідної складеної функції використаємо формулу $\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$

Знайдемо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\ln|x|x^y; \quad \frac{dx}{dt}=e^t; \quad \frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}.$$

У точці M параметр $t=1$. Обчислимо значення похідної $\frac{du}{dt}$ за умови

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = \ln t \Rightarrow \dfrac{du}{dt}(M) = 0 \cdot e^{-1}e + \ln e \cdot e^0 \cdot 1 = 1. \\ t = 1. \end{cases}$$

Приклад 7-4. Скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої у точці M(3;2;12) до поверхні $x^2 - y^2 + 5x - 4y - z = 0.$

Розв'язання. Поверхню задано рівнянням $F(x;y;z) = 0$, тому рівняння дотичної площини у точці $M(x_0;y_0;z_0)$ знайдемо за формулою

$$F'_x(M)(x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормальної прямої за формулою

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M)}.$$

Отже,

$$F'_x(M) = (2x - 5)\big|_M = 11, \quad F'_y(M) = (-2y - 4)\big|_M = -8, \quad F'_z(M) = -1.$$

Підставимо одержані похідні у формули:
$11(x-3) - 9(y-2) - 1(z-12) = 0$ *або* $11x - 8y - z - 5 = 0$ – рівняння дотичної площини; рівняння нормальної прямої: $\dfrac{x-3}{11} = \dfrac{y-2}{-9} = \dfrac{z-12}{-1}.$

Приклад 7-5. Знайдіть екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 3xy + 11.$

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки з умови рівності нулю частинних похідних першого порядку.

$$z'_x = 3x^2 - 3y, \quad z'_y = 3y^2 - 3x,$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y, \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x = x^4. \end{cases}$$

$$x^4 - x = 0, \quad x\left(x^3 - 1\right) = 0, \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^3 - 1 = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \\ x_2 = 1, \quad y_2 = 1. \end{array}\right.$$

Розв'язками цієї системи будуть дві точки $M_1(0;0)$ *і* $M_2(1;1)$. З'ясуємо, чи є вони екстремумами, користуючись критерієм Сильвестра. Для цього обчислимо значення визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

у стаціонарних точках.

Маємо $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3.$

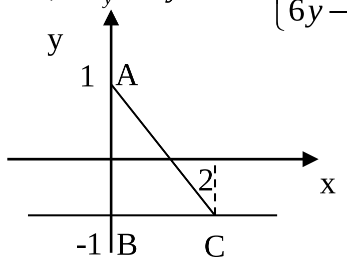
У точці $M_1(0;0)$ $\Delta(M_1) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$, отже ця точка не є точкою локального екстремума.

У точці $M_2(1;1)$ $\Delta(M_1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$, тобто $M_2(1;1)$ є точкою локального екстремума, а саме точкою локального мінімуму $z(1;1) = z_{\min} = 10$ (враховано $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_2) = 6 > 0$).

Приклад 7-6. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в області D, обмеженій лініями $x = 0, \quad y = -1, \quad x + y = 1.$

Розв'язання. Область D – трикутник ABC. Знайдемо стаціонарні точки функції

$$z'_x = 2x + 1, \quad z'_y = 6y - 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0, \\ 6y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}).$$



Точка $M(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6})$ стаціонарна точка, яка не належить області D. Тому найбільше та найменше значення функція набуває у точках межі області.

На відрізку AB: $x = 0, \quad y \in [-1;1]$ функція $z = 3y^2 - y$ є функцією змінної y. Стаціонарну точку цієї функції знаходимо з умови $z' = 0$, де $z' = 6y - 1 \Rightarrow M_1(0; \frac{1}{6}) \in D.$ Знайдемо значення функції $z(M_1) = z(0; \frac{1}{6}) = -\frac{1}{12}.$

На кінцях відрізка $AB: z(A) = z(0;1) = 2, \ z(B) = z(0;-1) = 4.$

На відрізку BC: $y = -1, \quad x \in [0;2]$ функція $z = x^2 + x + 4$ є функцією змінної x. Її стаціонарна точка $M_2(-\frac{1}{2};-1)$ знайдена з умови $z' = 2x + 1, \quad z' = 0$ не належить заданій області, тому обчислимо значення функції лише у точці C: $z(C) = z(2;-1) = 10.$

На відрізку AC: $y = 1 - x, \quad x \in [0;2]$ функція має вигляд $z = x^2 + 3(1-x)^2 + x - (1-x)$ або $z = 4x^2 - 4x + 2.$ Стаціонарна точка цієї функції $M_3(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ (з умови $8x - 4 = 0$). Значення функції у ній $z(M_3) = z(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) = 1.$

Серед усіх обчислених значень вибираємо найбільше та найменше:

$$z_{найб} = z(2;-1) = 10, \quad z_{найм} = z(0; \frac{1}{6}) = -\frac{1}{12}.$$