Диференціальні рівняння.

Приклади розв'язування диференціальних рівнянь

Приклад 1. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $x^2dy-(2xy+3y)dx=0.$

Розв'язання. Диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними називають рівняння виду

$$y' = f(x)g(x)$$

або

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(x)dy = 0.$$

Отже, рівняння $x^2dy - y(2x+3)dx = 0$ є рівнянням 1-го порядку з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні

$$\frac{dy}{y} = \frac{(2x+3)dx}{x^2}, \qquad \frac{dy}{y} = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)dx$$

і проінтегруємо обидві частини останньої рівності:

$$\ln|y| = \ln C + 2\ln|x| - \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln C(x^2 \cdot e^{-3/x}) \quad \Rightarrow \quad y = Cx^2e^{-3/x}.$$

$y = Cx^2e^{-3/x}$ – це і є загальний розв'язок даного рівняння.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $xy' - y = \sqrt{y^2 - x^2}$.

Розв'язання. Диференціальне рівняння першого порядку називають однорідним, якщо його можна представити у вигляді: $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$. Розв'язок такого рівняння шукають за допомогою підстановки: $y(x) = z(x)x$, де $z(x)$ – деяка нова невідома функція.

Запишемо дане рівняння у вигляді: $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$. Воно є однорідним, тому введемо заміну: $y = zx, \quad y' = z'x + z$.

$z'x + z = z + \sqrt{z^2-1} \quad \Rightarrow \quad z'x = \sqrt{z^2-1} \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{\sqrt{z^2-1}}{x}$. Після підстановки отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln\left|z + \sqrt{z^2-1}\right| = \ln Cx,$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = Cx \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2.$$

Отримали загальний інтеграл рівняння.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним, тобто виду $y' + p(x)y = q(x)$, тому введемо заміну: $y = u(x)v(x) = uv$, де $u = u(x), \quad v = v(x)$ – деякі невідомі функції.

$$u'v + uv' - \frac{2xuv}{1+x^2} = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad u'v + u(v' - \frac{2xv}{1+x^2}) = 1 + x^2.$$

Підберемо функцію $v = v(x)$ так, щоб вона задовольняла рівняння $v' - \dfrac{2xv}{1+x^2} = 0$.

$$v' - \frac{2xv}{1+x^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \qquad \Rightarrow \qquad \ln|v| = \ln(1+x^2) \qquad \Rightarrow \qquad v = 1 + x^2.$$

Підставимо знайдену функцію $v(x)$ в рівняння $u'v + u(v' - \dfrac{2xv}{1+x^2}) = 1 + x^2$:

$$u'(1+x^2) = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad du = dx \quad \Rightarrow \quad u = x + C.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = (1+x^2)(x+C)$.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $y''' = x^3 + 4\sin 3x$.

Розв'язання. Дане рівняння є диференціальним рівнянням третього порядку, що допускає зниження порядку типу $y^{(n)} = f(x)$. Для знаходження його розв'язку інтегруємо рівняння тричі:

$$y'' = \int y'''(x)dx = \int (x^3 + 4\sin 3x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}\cos 3x + C_{1,}$$

$$y' = \int y''(x)dx = \int (\frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}\cos 3x + C_1)dx = \frac{x^5}{20} - \frac{4}{9}\sin 3x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int y'(x)dx = \int (\frac{x^5}{20} - \frac{4}{9}\sin 3x + C_1 x + C_2)dx = \frac{x^6}{120} + \frac{4}{27}\cos 3x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $y'' + y' = x + 2$.

Розв'язання. Дане рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку, що допускає зниження порядку типу $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$. Заміною $y'(x) = p(x), \quad y''(x) = p'(x)$ рівняння зводять до лінійного рівняння першого порядку: $p' + p = x + 2$.

$$p = uv, \qquad p' = u'v + uv' \qquad \Rightarrow \qquad u'v + u(v' + v) = x + 2 \qquad \Rightarrow \qquad v' + v = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = -\int dx, \qquad v = e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad u'e^{-x} = x + 2, \qquad u' = e^x(x+2),$$

$$\int u = \int e^x(x+2)dx = e^x(x+2) - e^x + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad p(x) = e^{-x}(e^x(x+1) + C_1),$$

$$p(x) = x + 1 + C_1 e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad y = \int p(x)dx, \qquad y = \frac{x^2}{2} + x - C_1 x + C_2.$$

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння $y'' = y' + (y')^2$.

Розв'язання. Дане рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку, що допускає зниження порядку типу $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$. Заміною $y'(x) = p(y), \quad y''(x) = p'p$ його зводять до диференціального рівняння першого порядку:

$$p'p = p + p^2 \quad \Rightarrow \quad p'p = p(1+p) \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} p = 0, \\ p' = 1+p, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y' = 0, \\ \dfrac{dp}{dy} = 1+p, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y = C, \\ \dfrac{dp}{p+1} = dy. \end{array}\right.$$

Проінтегруємо друге рівняння:

$$\ln|p+1| = y + C_1.$$

Повертаючись до заміни, одержимо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$1 + y' = e^{y+C_1} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{C_1}e^y - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{C_1}e^y - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{e^{C_1}e^y - 1} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln\left|e^{y+C_1}\right| = y + x + C_2.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$\left[\begin{array}{l} y = C, \quad C = const, \\ \ln\left|e^{y+C_1}\right| = y + x + C_2. \end{array}\right.$$

Приклад 7. Розв'яжіть рівняння $а) y''' + 5y'' + 3y' - 9y = 0, \quad б) \; y''' + y'' + y' = 0$.

Розв'язання. а) Дане рівняння є лінійним однорідним рівнянням третього порядку. Запишемо характеристичне рівняння, що відповідає даному і розв'яжемо його:

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_{2,3} = -3. \end{array}\right.$$

Усі корені характеристичного рівняння дійсні, причому корінь $\lambda = -3$ – корені кратності два. Отже загальний розв'язок даного однорідного рівняння має вигляд: $y_{з.о.} = C_1e^x + C_2e^{-3x} + C_3xe^{-3x}$.

б) Це також лінійне однорідне рівняння третього порядку. Але його характеристичне рівняння $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$ має один дійсний корінь $\lambda_1 = 0$ та комплексно-спряжену пару коренів $\lambda_{2,3} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, тому загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$y_{з.о.} = C_1e^{0\cdot x} + C_2e^{\frac{-1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x = C_1 + e^{-\frac{x}{2}}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Приклад 8. Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' - 7y' + 12y = e^{3x}(x+1), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку зі спеціальною правою частиною. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння: $y'' - 7y' + 12y = 0$.

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 4, \\ \lambda_2 = 3,\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad y_{з.о.} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння, з огляду на праву частину рівняння, має вигляд: $y_{ч.н.} = \mathrm{x}\mathrm{e}^{3\mathrm{x}}(Ax + B) = e^{3x}(Ax^2 + Bx)$, де A, B – невідомі коефіцієнти. Для їх знаходження знайдемо першу і другу похідні $y_{ч.н.}$ і підставимо $y_{ч.н.}$, $y'_{ч.н.}$, $y''_{ч.н.}$ у початкове рівняння.

$$\begin{array}{l} y'_{ч.н.} = e^{3x}\left(3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B\right), \\ y''_{ч.н.} = e^{3x}\left(9Ax^2 + 12Ax + 9Bx + 6B + 2A\right) \end{array}.$$

$$e^{3x}\left(9Ax^2 + 12Ax + 9Bx + 6B + 2A\right) - 7e^{3x}\left(3Ax^2 + 2Ax + 3Bx + B\right) + 12e^{3x}\left(Ax^2 + Bx\right) = e^{3x}(x+1).$$

$$e^{3x}\left(9Ax^2 + 12Ax + 9Bx + 6B + 2A - 21Ax^2 - 14Ax - 21Bx - 7B + 12Ax^2 + 12Bx\right) = e^{3x}(x+1)$$

$$e^{3x}(-2Ax - B + 2A) = e^{3x}(x+1)$$

$$-2Ax - B + 2A = x + 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2A = 1, \\ -B + 2A = 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2}, \\ B = -2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_{ч.н.} = \mathrm{e}^{3\mathrm{x}}\left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x\right).$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку однорідного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння, тобто $y_{з.н.} = \mathrm{C}_1\mathrm{e}^{4\mathrm{x}} + \mathrm{e}^{3\mathrm{x}}\left(C_2 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right).$

Для знаходження розв'язку задачі Коші диференціюємо загальний розв'язок: $y'_{з.н.} = 4\mathrm{C}_1\mathrm{e}^{4\mathrm{x}} + \mathrm{e}^{3\mathrm{x}}\left(3C_2 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - x - 2\right)$ і підставимо в дві останні рівності початкові умови. Одержимо систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ 4C_1 + 3C_2 - 2 = 5, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y_{з.н.} = \mathrm{e}^{4\mathrm{x}} + \mathrm{e}^{3\mathrm{x}}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right).$$

Приклад 9. Розв'язати системи диференціальних рівнянь. Систему пункту а) розв'язати методом виключення. Систему пункту б) розв'язати за допомогою характеристичного рівняння, а також знайти частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 3y + 2t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y, \end{cases}$ $\begin{array}{l} x(0) = -1, \\ y(0) = 5. \end{array}$

Розв'язання.

а) З першого рівняння системи $y = x' - x - t$. Продиференціюємо перше рівняння по t: $x'' = x' + y' + 1$ і знайдемо $y' = x'' - x' - 1$. Значення y і y' підставимо у друге рівняння системи:

$$x'' - x' - 1 = -4x - 3(x' - x - t) + 2t \text{ або } x'' + 2x' + x = 5t + 1.$$

Дане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку зі спеціальною правою частиною. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння: $x'' + 2x' + x = 0$.

Характеристичне рівняння:

$$k^2 + 2k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = -1, \\ k_2 = -1, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x_{з.о.} = e^{-t}(C_1 + C_2 t).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння, з огляду на праву частину рівняння, має вигляд: $x_ч = At + B$, де A, B – невідомі коефіцієнти. Для їх знаходження знайдемо першу і другу похідні $x_ч$ і підставимо $x_ч$, $x_ч'$, $x_ч''$ у початкове рівняння $x'' + 2x' + x = 5t + 1$.

$x_ч' = A, \quad x_ч'' = 0.$

$2A + At + B = 5t + 1.$

$$At + (2A + B) = 5t + 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 5, \\ 2A + B = 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 5, \\ B = -9. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_{ч.н.} = 5t - 9.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку однорідного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння, тобто $x = e^{-t}(C_1 + C_2 t) + 5t - 9$.

Тоді $x' = -e^{-t}(C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-t} + 5$, а $y = x' - x - t = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 t)e^{-t} - 6t + 14$.

Отже, загальний розв'язок

$$\begin{cases} x = e^{-t}(C_1 + C_2 t) + 5t - 9, \\ y = e^{-t}(C_2 - 2C_1 - 2C_2 t) - 6t + 14. \end{cases}$$

б) Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 5-k & 4 \\ 4 & 5-k \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \quad (5-k)^2 - 16 = 0, \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = 1, \\ k_2 = 9. \end{array}\right.$$

Для кореня $k_1 = 1$ знаходимо власний вектор $(\alpha_1; \beta_1)$, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 4\beta_1 = 0, \\ 4\alpha_1 + 4\beta_1 = 0, \end{cases}$$

знаходимо $\alpha_1 = -\beta_1$ і, отже, вектор $(1; -1)$ – власний, а $x_1 = e^t$, $y_1 = -e^t$ – частинний розв'язок системи.

Для кореня $k_2 = 9$ знаходимо власний вектор $(\alpha_2; \beta_2)$, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} -4\alpha_2 + 4\beta_2 = 0, \\ 4\alpha_2 - 4\beta_2 = 0, \end{cases}$$

знаходимо $\alpha_2 = \beta_2$ і, отже, вектор $(1; 1)$ – власний, а $x_2 = e^{9t}$, $y_2 = e^{9t}$ – частинний розв'язок системи.

Загальний розв'язок записується через два знайдених лінійно незалежних розв'язки

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{9t}, \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{9t}. \end{cases}$$

Використавши початкові умови, одержимо: $\begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ -C_1 + C_2 = 5. \end{cases}$ Звідси маємо $C_1 = -3, C_2 = 2.$

Частинний розв’язок системи $\begin{cases} x = -3e^t + 2e^{9t}; \\ y = 3e^t + 2e^{9t}. \end{cases}$