

3. МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЕЛЕМЕНТІВ АВТОМАТИКИ І ТИПОВІ ЛАНКИ СИСТЕМ

Математичні характеристики елементів автоматики. Диференціальні рівняння, передавальні функції, частотні характеристики. Поняття типових ланок систем регулювання і їх характеристики. Типові з'єднання ланок.

Системи керування – це сукупність елементів, в яких відбуваються процеси різної фізичної природи. У системі одночасно можуть бути присутніми механічні, електричні, пневматичні і інші елементи, що взаємодіють між собою за відповідними законами, при цьому відбувається перетворення одного виду енергії в інший. Особливість цих елементів полягає в тому, що вони характеризуються детекторними властивостями, тобто здатністю передавати сигнал (інформацію) в одному напрямку. Наприклад, зміна температури гарячого спаю термопари спричиняє появу нового значення термоерс (термічної електро-рушійної сили) на виході ланки, однак зміна термоерс не впливає на температуру на вході. Без ланок з детекторними властивостями системи автоматичного керування непрацездатні або малоефективні.

Для розрахунку і досліджень систем автоматичного регулювання необхідно мати інформацію про статичні і динамічні властивості елементів, з яких складається система. Іншими словами, елементи системи повинні бути представлені універсальними математичними характеристиками.

До них належать диференціальні рівняння, передавальні функції, перехідні функції (криві розгону), частотні характеристики. Розглянемо їх докладніше.

Диференціальні рівняння. Для елемента (системи) з одним вхідним впливом $x(t)$ і однією вихідною величиною $y(t)$ лінійне диференціальне рівняння, що описує його властивості, має такий загальний вигляд:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x}{dt^m} \quad (3.1)$$

Вираз (3.1) називають рівнянням динаміки або рівнянням руху елемента у часі. Параметри рівняння (a_i і b_i) залежать від конструкції елементів, маси частин, що переміщаються, об'ємів, місткості і т.д.

Якщо у рівнянні (3.1) всі похідні прирівняти нулю, то отримаємо статичну характеристику елемента (системи):

$$y = f(x) \text{ або } y = kx, \text{ де } k = \frac{b_0}{a_n} \quad (3.2)$$

Рішення рівняння (3.1) описує поведінку вихідної величини $y(t)$ при заданих початкових умовах і конкретному законі зміни вхідної величини $x(t)$.

Розрахунок систем регулювання значно спрощується, якщо використати не диференціальні рівняння елементів системи, а їх передавальні функції.

Передавальна функція – це відношення вихідної величини ланки до вхідної за нульових початкових умов. При цьому вказані величини виражені в операторній формі, тобто

$$W(p) = Y(p) / X(p) \quad (3.3)$$

Будь-яку тимчасову функцію $y(t)$, $x(t)$ можна перетворити в її зображення $Y(p)$ і $X(p)$ в просторі Лапласа, де всі функції залежать не від t , а від змінної p . Диференціювання у часі, наприклад, області $dy(t)/dt$ відповідає множенню на змінну p в просторі Лапласа – $pY(p)$. Аналогічно $d^2y(t)/dt^2 = p^2Y(p)$. У подальших математичних перетвореннях оператор " p " розглядається як алгебраїчний співмножник, який можна винести за дужки, скорочувати і т.ін.

Таким чином, будь-яке диференціальне рівняння можна представити в операторній формі, формально замінивши операцію диференціювання d/dt символом p . Наприклад, диференціальне рівняння

$$T \frac{dy}{dt} + y = kx$$

в операторній формі має вигляд $TpY + Y = kX$ або $(Tp + 1)Y = kX$, звідки передавальна функція, згідно (3.3), дорівнює

$$W(p) = k / (Tp + 1).$$

Перехідна функція. Математичне рішення рівняння (3.1) описує поведінку вихідної величини $y(t)$ при заданому законі зміни вхідної величини $x(t)$ і заданих початкових умовах. Серед множини рішень велике практичне значення має ступінчаста перехідна функція або *крива розгону* – це реакція вихідної величини елемента на ступінчасту одиничну зміну вхідної $x = I(t - t_0)$ за нульових початкових умов (рис. 3.1). Криву розгону часто знімають експериментально на діючому об'єкті керування. Обробка кривої розгону дозволяє оцінити статичні і динамічні властивості об'єкта регулювання, отримати передавальну функцію.

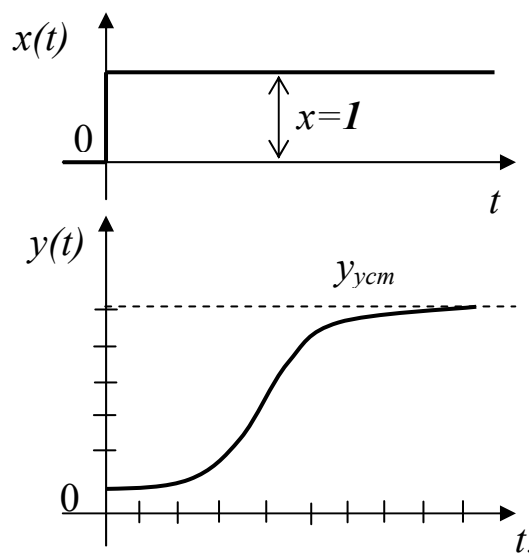


Рис. 3.1. Крива розгону елемента автоматики.

Частотні характеристики. Важливою характеристикою динамічних властивостей елемента (і системи в цілому) є реакція на синусоїдальний вплив. Частотні характеристики отримують шляхом заміни змінної " p " у просторі Лапласа на уявну частоту $j\omega$, тут $j = \sqrt{-1}$.

Тоді на основі (3.1) і (3.3) амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ) має вигляд:

$$W(j\omega) = ((b_0x + b_1j\omega + \dots b_m(j\omega)^m) / (a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n)) \quad (3.4)$$

Отриманий вираз іноді називають комплексним коефіцієнтом передачі. Для практичних розрахунків систем і побудови АФЧХ вираз (3.4) розділяють на дві частини – дійсну $Re(w)$ і уявну $Im(w)$:

$$W(j\omega) = Re(w) + j Im(w) = A(\omega) \exp(j\varphi(\omega)), \quad (3.5)$$

де A і φ амплітудна і фазова частотні характеристики.

$$A(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \arctg(\omega T), \quad (3.6)$$

На рис. 3.2 показано вигляд загальної амплітудно-фазової частотної характеристики елемента автоматики. Годограф АФЧХ отримують шляхом підстановки у вираз (3.5) значень ω від 0 до ∞ .

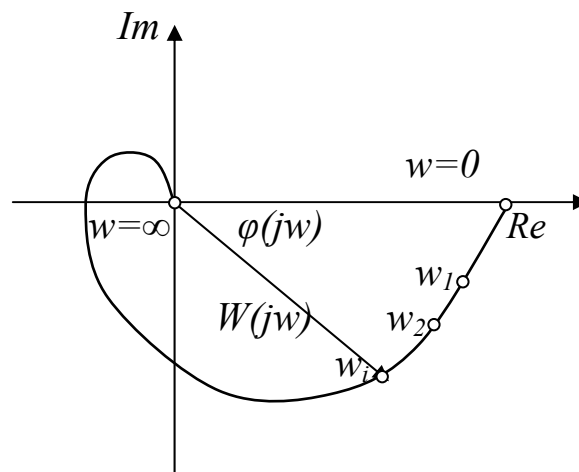


Рис. 3.2. Амплітудно-фазова частотна характеристика.

Типові ланки систем регулювання

Незважаючи на велику різноманітність елементів автоматики, які розрізняються між собою за фізичною природою, конструктивним виконанням, потужністю і т.ін., можна виділити усього декілька типових (елементарних) ланок, за допомогою яких можна буде побудувати будь-які більш складні ланки, що зустрічаються на практиці. Або навпаки – складні алгоритмічні схеми систем керування можуть бути розбиті на прості типову ланки не вище другого порядку.

Типові ланки поділяються на пропорційні (підсилювальні), аперіодичні (інерційні), коливальні, інтегрувальні, диференціюючі і ланки транспортного запізнення.

Пропорційна ланка. Це найбільш прості ланки. Прикладами може бути подільник напруги, важіль, механічний редуктор, підсилювальний каскад тощо. Для цих ланок справедлива пропорційна залежність між вхідною і вихідною величинами:

$$y_{\text{вих}}(t) = kx_{\text{вх}}(t), \quad (3.7)$$

де k – коефіцієнт передачі (підсилення).

Передавальна функція даної ланки чисельно дорівнює коефіцієнту передачі:

$$W(p) = k \quad (3.8)$$

Приклад пропорційної ланки і її характеристики показано на рис. 3.3.

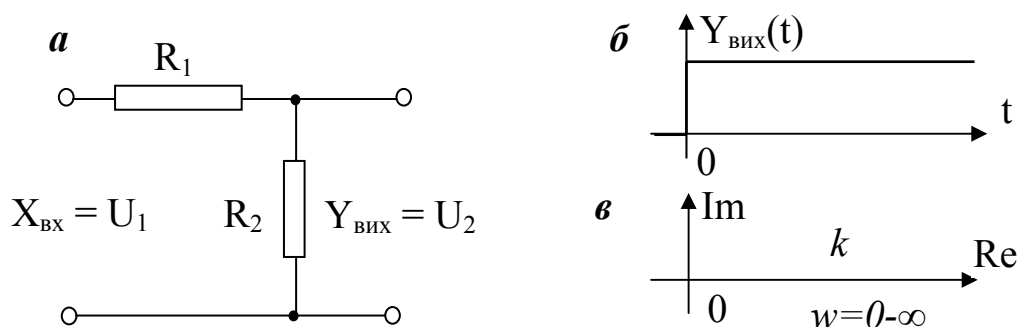


Рис. 3.3. Приклад пропорційної ланки – подільник напруги (а), перехідна (б) і амплітудно-фазова функція (в).

Аперіодична ланка першого порядку (рис. 3.4).

Аперіодична ланка описується диференціальним рівнянням:

$$T \frac{dy_{\text{вих}}}{dt} + y_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}} \quad (3.9)$$

де T – стала часу; k - коефіцієнт передачі.

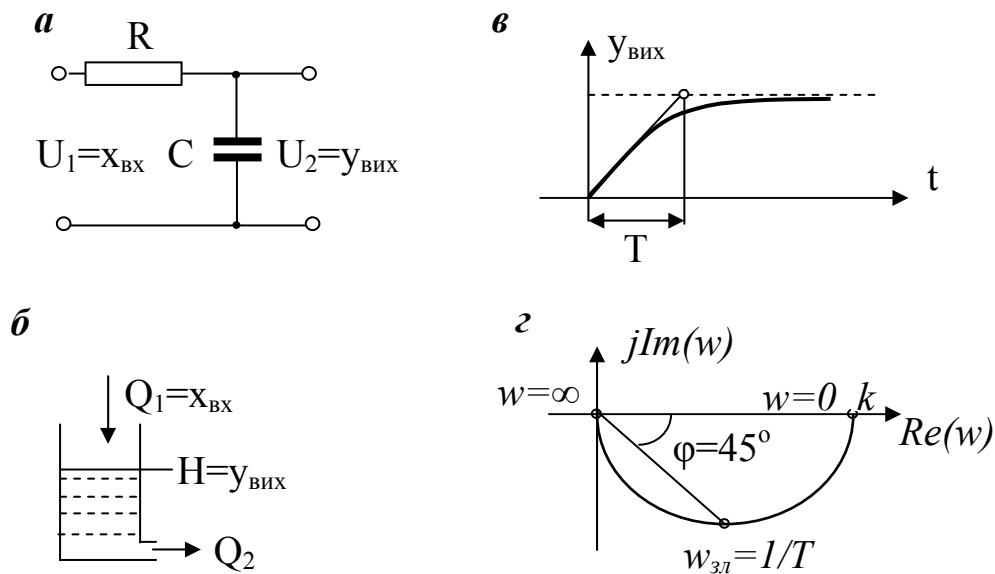


Рис. 3.4. Приклади аперіодичної ланки (а, б), перехідна (в) і амплітудно-фазова (г) характеристики.

Як показано в (3.1), передавальна функція даної ланки визначається виразом:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1} \quad (3.10)$$

Прикладами аперіодичної ланки є тепловий об'єкт, де входом служить, наприклад, витрата палива, а вихідною величиною температура. Інший приклад – технологічна посудина (ємність) з вільним витіканням рідини, тут вхідний сигнал – витрата рідини, що надходить у посудину, а вихідний – її рівень у посудині.

Перехідна функція аперіодичної ланки досягає свого сталого значення не відразу, як в підсилювальній ланці, а поступово згідно з експоненціальним (аперіодичним) законом, через що ланка і отримала свою назву. Мірою інерційності ланки є постійна часу T . Чим менше T , тим аперіодична ланка ближча за своїми динамічними властивостями до пропорційної. Наприклад, стала часу електронних підсилювачів систем регулювання дорівнює $10^{-4} - 10^{-6}$ сек., тому ці підсилювачі розглядають як пропорційні ланки.

Частотні характеристики ланки можна отримати з (3.10). Амплітудно-фазова характеристика представлена виразом:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} \quad (3.11)$$

Для побудови амплітудно-фазової характеристики ланки виділимо у виразі (3.11) дійсну і уявну частини шляхом виключення уявної складової в знаменнику. Отримаємо:

$$\operatorname{Re}(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}, \quad \operatorname{Im}(\omega) = -\frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \quad (3.11a)$$

У відповідності з (3.6) маємо амплітудну і фазову частотні характеристики:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)} = -\arctg(T\omega) \quad (3.12)$$

Амплітудно-фазова частотна характеристика може бути представлена виразом:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} e^{-j\arctg(T\omega)} \quad (3.13)$$

З аналізу амплітудно-частотної характеристики $A(\omega)$ випливає, що аперіодична ланка має властивість фільтра – добре пропускає сигнали малих частот і погано – великих, із збільшенням частоти зменшується амплітуда вихідного сигналу. Аналіз фазової характеристики $\varphi(\omega)$ показує, що вихідні коливання відстають від вхідних. Це відставання змінюється в межах від 0 до 90° . На частоті зламу $\omega_{зл} = 1/T$ $\varphi(\omega) = -45^\circ$.

Коливальна ланка. Коливальна ланка описується рівнянням другого порядку:

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = kx \quad (3.14)$$

де T_1 і T_2 – сталі часу; k – коефіцієнт передачі.

Із (3.14) випливає передавальна функція ланки:

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} \quad (3.15)$$

На рис. 3.5 наведено приклади фізичної реалізації коливальної ланки: а – коливальний контур з R, L, C параметрами і механічна система, що включає пружину і гідравлічний демпфер (б).

Перехідна функція (рішення рівняння 3.14) може мати аперіодичний (пунктирна лінія на рис. 3.5 в) і коливальний вид (суцільна лінія).

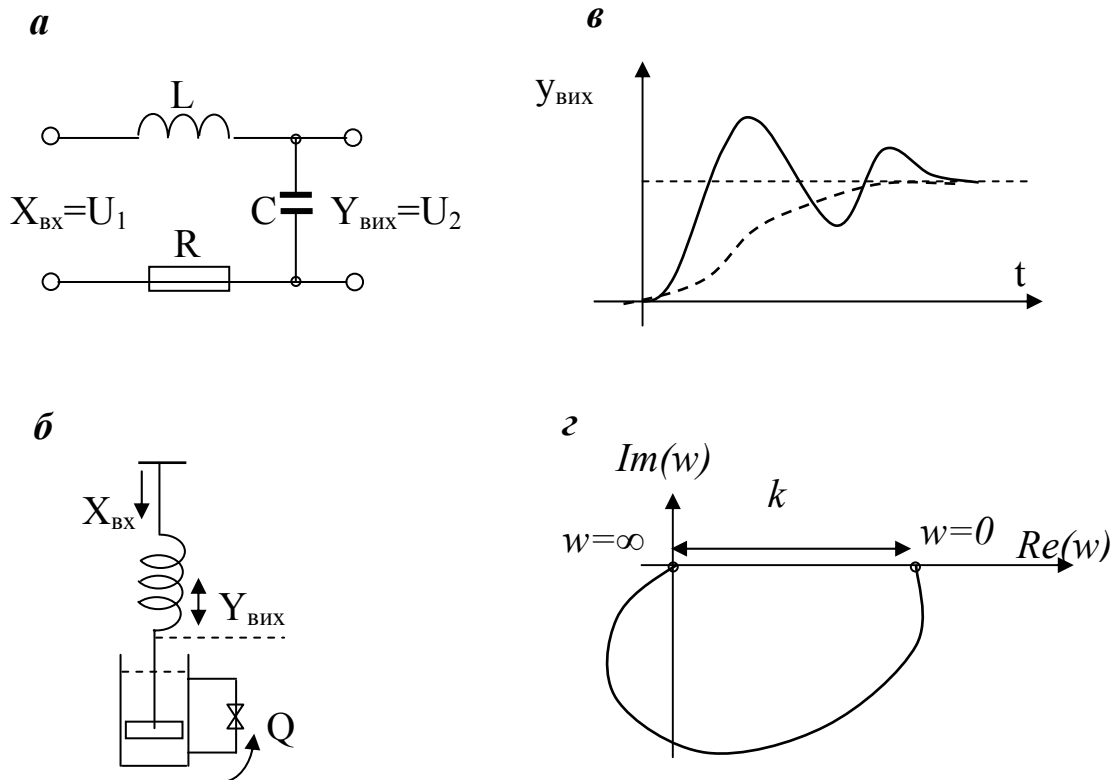


Рис. 3.5. Приклади коливальної ланки (а і б), перехідна (в) та амплітудно-фазова характеристики (г).

Для того щоб ланка було коливальною, необхідно, щоб дискримінант коренів характеристичного рівняння (знаменник виразу 3.15) був від'ємним.

Корені характеристичного рівняння знаходять за виразом:

$$p_{1,2} = -\frac{T_1}{2T_2^2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^4} - \frac{1}{T_2^2}}$$

Для того щоб підкореневий вираз був від'ємним, необхідно виконання умови:

$$\frac{T_1}{T_2} < 2 \quad (3.16)$$

Коливальна ланка характеризується коефіцієнтом загасання ξ :

$$\xi = \frac{T_1}{2T_2} \quad (3.17)$$

Тоді з урахуванням (3.16 і 3.17) можна вважати, що при $\xi < 1$ ланка належить до коливального виду, при $\xi = 1$ ланка стає аперіодичною другого порядку, яку можна представити у вигляді двох типових ланок – аперіодичних першого порядку, з'єднаних послідовно.

Амплітудно-фазова частотна характеристика коливальної ланки (рис. 3.5 г) відрізняється тим, що її годограф захоплює від'ємну область дійсної осі координатного простору.

Інтегрувальна ланка. Рівняння ланки в інтегральній формі має вигляд:

$$y_{\text{вих}}(t) = k \int_0^t x_{\text{вх}}(t) dt$$

або в диференціальній формі
$$\frac{dy_{\text{вих}}(t)}{dt} = kx_{\text{вх}}(t) \quad (3.18)$$

Перейшовши до операторної форми, отримаємо передавальну функцію:

$$W(p) = \frac{k}{p}.$$

Амплітудно-фазова характеристика:
$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}.$$

З одержаних рівнянь видно, що при постійному вхідному сигналі вихідний сигнал інтегруючої ланки вміть починає змінюватися з постійною швидкістю, що в реальних умовах практично нездійсненно. Тому всі вищенаведені рівняння справедливі для *ідеальної* інтегруючої ланки.

У реальній інтегруючій ланці присутня певна інерційність, тому диференціальне рівняння і передавальна функція реальної інтегруючої ланки мають вигляд:

$$\frac{d^2 y_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + \frac{dy_{\text{вих}}(t)}{dt} = kx_{\text{вх}}(t) \quad \text{і} \quad W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}$$

Прикладом реальної інтегруючої ланки може служити будь-який технологічний збірник (накопичувач) матеріалу, де вхідний сигнал – надходження матеріалу, а як вихідна величина – його маса в збірнику.

На рис. 3.6 показано основні характеристики інтегруючої ланки.

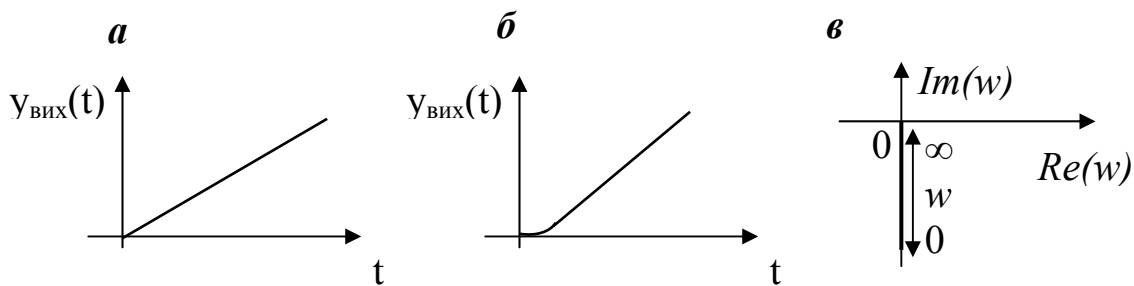


Рис. 3.6. Перехідна функція ідеальної (а), реальної (б) інтегрувальної ланки та амплітудно-фазова характеристика ідеальної ланки (в).

Диференціююча ланка. Вихідна величина цієї ланки пропорційна швидкості зміни вхідної:

$$y_{\text{вих}}(t) = k \frac{dx_{\text{вх}}(t)}{dt},$$

звідки передавальна функція має вигляд:

$$W(p) = kp. \quad (3.19)$$

Однак не існує такого реального елемента, в якому на виході точно відтворювалася б похідна від будь-якого вхідного сигналу. Тому тут також класифікують ланки на ідеальні і реальні. Прикладом диференціюючої ланки може служити електрична ємність (C), якщо вхідним сигналом вибрати прикладену до неї напругу u , а вихідним – протікаючий струм i . Тоді маємо: $i = C \frac{du}{dt}$, що відповідає виразу (3.19). Ідеальною ланкою даний

елемент може бути, якщо нехтувати опором ліній підключення ємності. Фактично ланка повинна бути представлена схемою (рис. 3.7 а).

У цьому випадку струм через опір і ємність буде однаковий, і у відповідності з другим законом Кірхгофа можна отримати:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du_{ex}}{dt},$$

принявши $T=RC$ і $k=1/R$, маємо:

$$T \frac{di}{dt} + i = kT \frac{du_{ex}}{dt}, \quad (3.20)$$

де T – стала часу, k – коефіцієнт передачі.

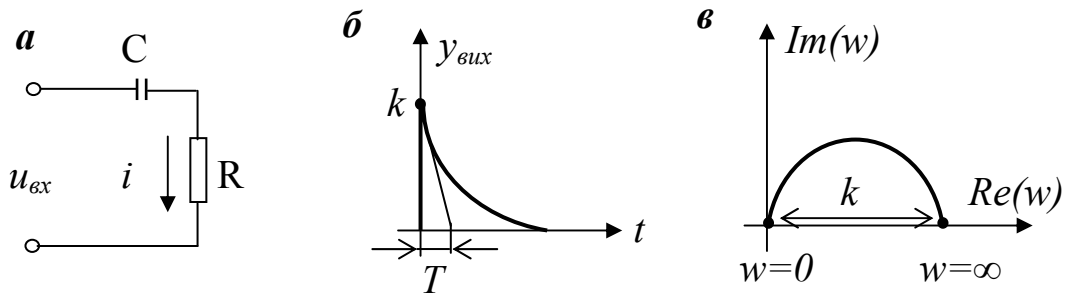


Рис. 3.7. Схема реальної диференціюючої ланки (а), перехідна (б) і амплітудно-частотна характеристики (в).

У загальному випадку рівняння реальної диференціюючої ланки:

$$T \frac{dy_{vux}(t)}{dt} + y_{vux}(t) = kT \frac{dx_{ex}}{dt}, \quad (3.21)$$

звідки передавальна функція:

$$W(p) = \frac{kTp}{Tp + 1}. \quad (3.22)$$

Рішення диференціального рівняння (3.21) має вигляд:

$$y_{vux}(t) = ke^{-\frac{t}{T}}, \text{ його графічне представлення показано на рис. 3.7 б.}$$

Амплітудно-фазова характеристика реальної диференціюючої ланки являє собою напівколо, розташоване в першому квадранті комплексної площини з центром на дійсній осі на відстані $k/2$ від початку координат (рис. 3.7 в).

Ланка транспортного (чистого) запізнення. На відміну від попередніх ланок, ця ланка описується рівнянням з аргументом, що запізнюється:

$$y_{\text{вих}}(t) = x_{\text{вх}}(t - \tau), \quad (3.23)$$

де τ – час транспортного запізнення.

Вихідна величина ланки запізнення точно копіює його вхідну величину, однак з деяким запізненням за часом τ .

Прикладом ланки, що запізнюється, може служити конвеєр, в якому після зміни вхідної величини, наприклад, подачі матеріалу на початку конвеєра, повинен минути певний проміжок часу τ , перш ніж почнеться зміна вихідної величини – кількість матеріалу в зоні розвантаження конвеєра.

Передавальна функція і АФЧХ ланки мають вигляд:

$$W(p) = e^{-p\tau} \text{ і } W(jw) = e^{-jw\tau}. \quad (3.24)$$

Графічно амплітудно-фазова характеристика має вигляд кола одиничного радіуса з центром на початку координат (рис. 3.8 б). При $w=0$ вектор АФЧХ розташовується вздовж додатної дійсної напівосі, із зростанням w вона обертається за годинниковою стрілкою і при $w=2\pi/\tau$ повертається в початкове положення.

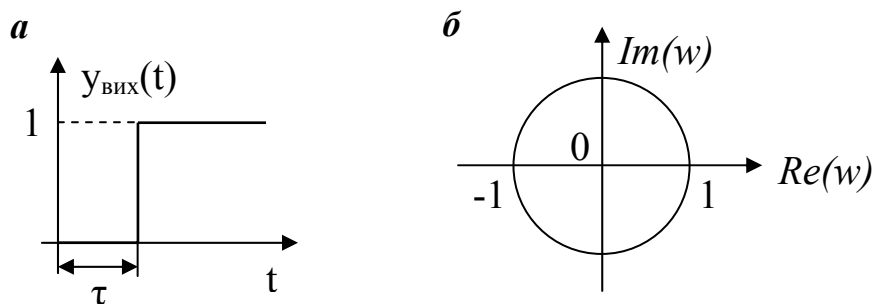


Рис. 3.8. Перехідна і амплітудно-фазова характеристики ланки транспортного запізнення.

На завершення, зазначимо, що наявність у системі регулювання ланки транспортного запізнення значно знижує якість регулювання, а іноді робить систему регулювання нестійкою, що буде розглянуто нижче.

Динамічні характеристики типових з'єднань ланок

У системах регулювання ланки можуть з'єднуватися у найрізноманітніших поєднаннях. Існує три основних види з'єднань ланок, комбінуючи які, можна прийти до будь-якої складної системи. Це: послідовне, паралельне і зустрічно-паралельне (обхват ланки зворотним зв'язком) з'єднання.

Структурні схеми різних з'єднань ланок показано на рис. 3.9.

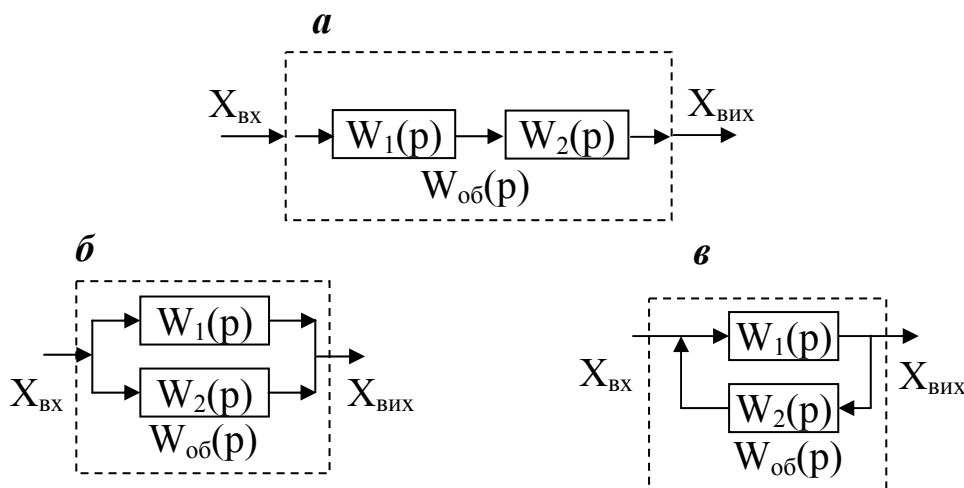


Рис. 3.9. Варіанти з'єднання ланок.

Неважко бачити, що при послідовному з'єднанні ланок (рис. 3.9 а) передавальна функція загальної (підсумкової) ланки дорівнює добутку передавальних функцій елементарних ланок, а при паралельному з'єднанні (рис. 3.9 б) – сумі передавальних функцій. Тому у разі з'єднання двох ланок маємо:

$$W_{об1}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \quad \text{і} \quad W_{об2}(p) = W_1(p) + W_2(p)$$

Зустрічно-паралельне включення (рис. 3.9 в) часто називають з'єднанням з обхватом ланки зворотним зв'язком.

На схемі видно, що ланка з передавальною функцією $W_2(p)$ охоплює як зворотний зв'язок першу ланку. У цьому випадку передавальна функція загальної ланки зображується виразом:

$$W_{об}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p) \cdot W_2(p)} \quad (3.25)$$

При цьому в знаменнику ставиться знак " + ", якщо зворотний зв'язок від'ємний, і " - " при додатному зворотному зв'язку.

Для забезпечення стійкості елементів автоматики і систем загалом найчастіше застосовують від'ємні зворотні зв'язки.

Контрольні запитання:

1. Наведіть способи представлення динамічних характеристик елементів САР.

2. Наведіть у загальному вигляді диференціальне лінійне рівняння для будь-якого елемента САР.

3. Поясніть поняття передавальної функції елемента САР. Як на основі диференціального рівняння отримати передавальну функцію?

4. Поясніть поняття перехідної функції елемента автоматики.

5. Охарактеризуйте частотні характеристики елементів САР.

6. Назвіть типові ланки систем регулювання.

7. Наведіть характеристики пропорційної ланки.

8. Наведіть приклади аперіодичної ланки першого порядку і її характеристики.

9. Наведіть всі динамічні характеристики реальної та ідеальної диференціюючої ланки.

10. Наведіть характеристики коливальної ланки.

11. Яким чином визначається коефіцієнт загасання коливальної ланки?

12. Наведіть динамічні характеристики реальної та ідеальної інтегрувальної ланки.