

§ 1. Матриці та визначники

1.1 Матриці, лінійні операції над ними

Алгебра – розділ математики, що досліджує операції, аналогічні додаванню, відніманню, множенню, діленню, які виконуються не тільки над числами, але і над іншими математичними об'єктами. У лінійній алгебрі вивчаються об'єкти трьох видів: матриці, простори і алгебраїчні форми.

Довільна сукупність чисел a_{ij} , розташована у вигляді прямокутної таблиці, яка складається з m рядків та n стовпців, називається *матрицею* розмірності $m \times n$ та позначається одним з наступних символів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \|a_{ij}\|_m^n.$$

Якщо усі елементи $a_{ij} = 0$, то така матриця називається *нульовою* і позначається Θ .

Дві матриці $A = \|a_{ij}\|_m^n$ та $B = \|b_{ij}\|_m^n$ називаються *рівними*, якщо $a_{ij} = b_{ij}$ при всіх $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Якщо кількість стовпців матриці A дорівнює 1, то таку матрицю називають *матрицею-стовпцем*. Аналогічно матрицю розмірності $1 \times n$ називають *матрицею-рядком*.

Матриця $B = \|b_{ji}\|_n^m$ називається *транспонованою* по відношенню до матриці $A = \|a_{ij}\|_m^n$, якщо $a_{ij} = b_{ji}$ для всіх $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. При цьому матрицю B позначають символом A^T , а операцію переходу від матриці A до матриці A^T називають *транспонуванням*.

Матриці однакової розмірності можна додавати. *Сумою* матриць $A = \|a_{ij}\|_m^n$ та $B = \|b_{ij}\|_m^n$ називається матриця $A + B = \|a_{ij} + b_{ij}\|_m^n$.

Будь-яку матрицю можна множити на довільне число. *Добутком* матриці $A = \|a_{ij}\|_m^n$ на число α називається матриця $\alpha A = A\alpha = \|\alpha a_{ij}\|_m^n$.

Для довільних матриць A, B, C розмірності $m \times n$ та довільних чисел α, β легко переконатись в таких властивостях:

- $A + B = B + A$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

1.2 Визначник матриці

Матриця називається *квадратною*, якщо у неї кількості рядків та стовпців однакові, тобто $m = n$. Для квадратної матриці введемо поняття визначника, давши попередньо кілька означень.

Розглянемо n різних натуральних чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, причому для всіх $k = 1, 2, \dots, n$ виконується $1 \leq c_k \leq n$. Тоді запис $c_1, c_2, \dots, c_n$ є деякою перестановкою n чисел $1, 2, \dots, n$, яку називають перестановкою n -го порядку. Будемо казати, що числа p, k утворюють безлад в перестановці n -го порядку, якщо число p стоїть в ній лівіше від числа k і $p > k$.

Позначимо символом $P(c_1, c_2, \dots, c_n)$ кількість усіх безладів в перестановці n -го порядку $P(c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Визначником n -го порядку, що відповідає матриці $A = \|a_{ij}\|_n^n$, називається сума $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ доданків, яка береться по всім можливим перестановкам n -го порядку:

$$\sum (-1)^{P(c_1, c_2, \dots, c_n)} \cdot a_{1c_1} \cdot a_{2c_2} \cdot \dots \cdot a_{nc_n}.$$

Визначник позначається одним із символів

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \det A.$$

Якщо у визначнику зібрати усі доданки, які містять елемент a_{ij} , і винести його за дужки, то величина, яка залишиться в дужках, називається алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці A і позначається A_{ij} .

Якщо в матриці $A = \|a_{ij}\|_n^n$ викинути i -й рядок та j -й стовпець, то отримаємо матрицю $(n-1)$ -го порядку. Визначник цієї матриці називається мінором визначника матриці A і позначається M_{ij} .

Виявляється, що $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Сформулюємо властивості визначників n -го порядку.

- Визначник не змінюється при транспонуванні матриці, тобто $\det A = \det A^T$.
- При перестановці місцями двох стовпців визначник змінює знак.
- Визначник з двома однаковими стовпцями дорівнює нулю.
- Якщо усі елементи j -го стовпця визначника D мають вигляд $a_{ij} = \alpha b_{ij} + \beta c_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n$, де α, β – фіксовані числа, то має місце формула $D = \alpha D_j(b) + \beta D_j(c)$, де $D_j(e)$ – визначник, отриманий з визначника D заміною j -го стовпця на стовпець з елементами e_i , $i = 1, 2, \dots, n$.
- Загальний множник усіх елементів деякого стовпця визначника можна винести за знак визначника.
- Якщо деякий стовпець складається з нулів, то визначник дорівнює нулю.
- Визначник не зміниться, якщо до елементів одного із його стовпців додати відповідні елементи довільного іншого стовпця, помножені на деяке число.
- Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого стовпця на алгебраїчні доповнення цих

елементів, тобто $D = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Ця властивість називається розкриттям визначника за j -им стовпцем.

- Сума добутків усіх елементів деякого стовпця визначника D на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого стовпця дорівнює нулю, тобто $\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{is} = 0$, $j \neq s$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Зауважимо, що усі сформульовані властивості, за винятком першої, мають місце і для рядків визначника.

З означення визначника отримуємо такі правила обчислення визначників другого та третього порядків:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Правило обчислення визначника третього порядку ще називають правилом трикутників.

Визначники четвертого і вище порядків обчислюють, розкриваючи його за якимось стовпцем чи рядком. Зрозуміло, що доцільно вибирати той стовпець чи рядок, в якому найбільше нулів.

З означення визначника легко бачимо, що коли у визначнику усі елементи, які знаходяться нижче (вище) головної діагоналі, дорівнюють нулю, то такий визначник дорівнює добутку діагональних елементів. Тому ефективним методом обчислення визначника є зведення його до трикутного вигляду, використовуючи сформульовані властивості.

1.3 Множення матриць, обернена матриця

Матриця $C = \|c_{ij}\|_m^n$ називається *добутком* матриці $A = \|a_{is}\|_m^k$ на матрицю $B = \|b_{sj}\|_k^n$, якщо її елементи визначаються за формулами

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^k a_{is} b_{sj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Записуємо відповідно $C = AB$. Як бачимо, матрицю A можемо помножити на матрицю B тоді і тільки тоді, коли кількість стовпців матриці A така сама, як кількість рядків матриці B .

Квадратна матриця E розмірності $n \times n$ називається *одиничною*, якщо для довільної квадратної матриці A тієї ж розмірності має місце рівність

$$AE = EA = A.$$

Можна показати, що такому визначенню задовольняє єдина матриця – матриця, в якій на головній діагоналі знаходяться одиниці, а на всіх інших місцях – нулі

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сформулюємо деякі властивості добутку матриць. Якщо визначені ліві частини рівностей, то визначені і праві частини, причому:

- $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$

- $A(B+C) = AB+AC$
- $(A+B)C = AB+BC$
- $A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Якщо для квадратної матриці $A = \|a_{ij}\|_n^n$ існує матриця B , для якої $AB=BA=E$, то матриця B називається *оберненою* до матриці A . Обернена матриця до матриці A позначається A^{-1} .

Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Для матриці $A = \|a_{ij}\|_n^n$ обернена існує тоді і тільки тоді, коли $\det A \neq 0$. При цьому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A .

1.4 Ранг матриці

Для матриці $A = \|a_{ij}\|_m^n$ зафіксуємо r рядків і таку саму кількість стовпців (зрозуміло, що $r \leq \min\{m, n\}$). Елементи, які знаходяться на перетині взятих стовпців та рядків, утворюють квадратну матрицю r -го порядку. Її визначник називається *мінором* r -го порядку матриці A .

Відзначимо, що мінорів одного і того ж порядку може бути кілька. Наприклад, для матриці $A = \|a_{ij}\|_m^n$ різних мінорів першого порядку буде $m \cdot n$, а для матриці розмірності 5×6 різних мінорів третього порядку буде $C_5^3 \cdot C_6^3 = 10 \cdot 20 = 200$.

Найвищий порядок відмінного від нуля мінора матриці A називається *рангом* цієї матриці і позначається символом $r(A)$. Якщо усі елементи матриці A дорівнюють нулю, то вважається, що $r(A) = 0$. Отже, рангом матриці є число r , яке задовольняє умову існування для матриці A відмінного від нуля мінора порядку r і відсутності у цієї матриці відмінних від нуля мінорів порядку більшого ніж r . Зауважимо, що ранг квадратної невинродженої матриці порядку n дорівнює n , бо для неї відмінним від нуля мінором порядку n буде її визначник.

Елементарними перетвореннями матриці називатимемо такі дії: заміна місцями двох довільних рядків (стовпців); множення довільного рядка (стовпця) на ненульове число; заміна елементів деякого рядка (стовпця) сумами цих елементів з відповідними елементами іншого рядка (стовпця), помноженими на деяке число. Співвідношення між матрицею A і матрицею B , отриманою з допомогою елементарних перетворень над A , записуватимемо $A \sim B$.

Виявляється, що ранг матриці не змінюється внаслідок елементарних перетворень над її рядками (стовпцями). Тому для знаходження рангу матриці ефективним є зведення її до так званого трапецієвидного вигляду з допомогою елементарних перетворень над рядками. Кількість ненульових рядків у матриці

§ 2. Системи лінійних рівнянь

В загальному випадку система m лінійних рівнянь з n невідомими має такий вигляд

[illegible]

Розв'язком системи (2) називається така сукупність n чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, яка при підстановці в му (2) на місце невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ перетворює усі рівняння цієї системи в тотожності.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5, \\ x_1 - 3x_2 = 8 \end{cases}$$

Система, яка має хоча б один розв'язок, називається *сумісною*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$
$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$
$$AX = B. \quad (3)$$

Матриця A називається основною матрицею системи (1). Поряд з цією матрицею розглянемо так

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ця матриця має розмірність $m \times (n+1)$.

Щодо сумісності системи лінійних рівнянь має місце

Теорема Кронекера-Капеллі. Система лінійних рівнянь (2) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранги її основної та розширеної матриць рівні між собою

$$r(A) = r(\bar{A}). \quad (4)$$

Зауважимо, що, оскільки будь-який мінор матриці A є також мінором матриці $\bar{A}$, а кожний мінор матриці $\bar{A}$ є або мінором матриці A , або складається з елементів матриці A і елементів стовпця вільних членів, то невиконання рівності (4) рівносильне рівності $r(\bar{A}) = r(A) + 1$. Отже, рівність (4) може порушуватись хіба що за рахунок стовпця вільних членів.

Еквівалентними перетвореннями системи лінійних рівнянь називатимемо такі дії: заміна місцями двох довільних рівнянь; множення довільного рівняння на ненульове число; заміна довільного рівняння сумою цього рівняння з іншим рівнянням, помноженим на деяке число. Очевидно, внаслідок елементарних перетворень системи лінійних рівнянь її розв'язки не змінюються.

Метод Гаусса розв'язування системи лінійних рівнянь в послідовному виключенні змінних з допомогою еквівалентних перетворень над системою лінійних рівнянь. Оскільки еквівалентним перетворенням системи лінійних рівнянь відповідають елементарні перетворення над відповідними рядками розширеної матриці цієї системи, то зручно буде записати розширену матрицю і звести її до трапецієвидного вигляду з допомогою елементарних перетворень над рядками. При цьому ми зведемо одночасно до трапецієвидного вигляду і основну матрицю системи та, відповідно до теореми Кронекера-Капеллі, зробимо висновок про сумісність даної системи лінійних рівнянь. У випадку сумісності за допомогою розширеної матриці трапецієвидного вигляду запишемо систему лінійних рівнянь, яка еквівалентна заданій системі лінійних рівнянь і легко розв'язується.

2.2 Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом

Система лінійних рівнянь називається *квадратною*, якщо у неї кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. Отже, квадратна система лінійних рівнянь з n невідомими виглядатиме так

[illegible]

Припустимо, що основна матриця A системи (9), яку можна записати у матричному вигляді (3), не вироджена, тобто

$$\det A \neq 0. \quad (10)$$

Тоді, як відомо, вона має обернену матрицю A^{-1} виду (1).

Домножимо зліва на A^{-1} обидві частини (3)

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B. \quad (11)$$

Але $(A^{-1}A)X = EX = X$. Тому (11) перепишеться у вигляді

$$X = A^{-1}B. \quad (12)$$

Таким чином, якщо основна матриця квадратної системи невинроджена, то знайшовши обернену матрицю для основної матриці, знаходимо розв'язок ситеми (9). В цьому полягає *матричний* метод розв'язування систем лінійних рівнянь.

Зауважимо, що, як уже згадувалось, для квадратної невинродженої матриці порядку n її ранг дорівнює n . Ранг розширеної матриці, яка має розмірність $n \times (n+1)$, не може бути більшим за n . Отже, у випадку виконання (10) тоді виконується (8) і система (9) має єдиний розв'язок.

Зрозуміло, що не кожную систему лінійних рівнянь (навіть квадратну) можна розв'язати матричним методом, на відміну від методу Гаусса.

2.3 Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Крамера

Нехай маємо квадратну систему лінійних рівнянь з n невідомими та невинродженою основною матрицею. Тоді, як ми встановили, її розв'язок матиме вигляд (12). Цю рівність, з врахуванням (1), можна подати у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2} \\ \vdots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Прирівнюючи ліві та праві елементи лівого і правого стовпців, маємо

$$x_k = \frac{1}{\det A} (b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \dots + b_n A_{nk}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Вираз $b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \dots + b_n A_{nk}$ можемо розглядати як розкриття за k -им стовпцем визначника

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & \dots & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & \dots & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,k-1} & \dots & a_{m,k+1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Ми бачимо, що визначник Δ_k отримуємо з визначника $\Delta = \det A$ основної матриці заміною в ньому k -го стовпця стовпцем вільних членів.

З урахуванням сказаного рівності (13) одержимо

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Формули (15) називаються формулами Крамера.

Отже, метод Крамера розв'язування квадратних систем лінійних рівнянь полягає в наступному: обчислюємо визначник Δ основної матриці, якщо $\Delta \neq 0$, то обчислюємо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, замінюючи послідовно у визначнику Δ перший, другий, ..., n -ий стовець стовпцем вільних членів, після цього знаходимо невідомі за формулами (15).

2.4 Однорідні системи лінійних рівнянь

Система лінійних рівнянь називається *однорідною*, якщо усі її вільні члени дорівнюють нулю. Отже, відповідно до (2), в загальному випадку однорідна система m лінійних рівнянь з n невідомими запишеться так

У випадку квадратної однорідної системи лінійних рівнянь з невідірженою основною матрицею нетривіальних розв'язків немає, отже, немає змісту розв'язувати матричним методом чи методом Крамера.