

Приклади розв'язання задач

1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ знайти:

а) A^T ; б) $3A$; в) $4A + B$; г) $5A - 2B$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{ а) } 3A &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 & 6 \\ -6 & 6 & 12 & 15 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{ б) } 4A + B &= 4 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -12 & 0 & 8 \\ -8 & 8 & 16 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 3 & 4 \\ -8 & 8 & 23 & 21 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{ в) } 5A - 2B &= 5 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -15 & 0 & 10 \\ -10 & 10 & 20 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 16 & 6 & -8 \\ 0 & -2 & 14 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -7 & -31 & -6 & 18 \\ -10 & 12 & 6 & 23 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2. Якою повинна бути матриця A , щоб $A - A^T = \Theta$?

$\blacktriangleright$ По-перше, матриці A та A^T повинні бути однакової розмірності. Оскільки кількість рядків у матриці A^T така сама, як кількість стовпців у матриці A , і навпаки, то це означає, що матриця A повинна мати однакову кількість рядків та стовпців. Також елемент a_{ij} матриці A стає в матриці A^T в j -й рядок та i -й стовпець, отже, повинно бути $a_{ij} = a_{ji}$. Отже, шукана матриця має вигляд $A = \|a_{ij}\|_n^n$ і при цьому $a_{ij} = a_{ji}$ при всіх $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$. $\blacktriangleleft$

3. Обчислити визначники:

$$\text{ а) } \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \sin 2\alpha \\ \cos 3\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\blacktriangleright \text{ а) } \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4. \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{ б) } \begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \sin 2\alpha \\ \cos 3\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix} = \sin 3\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha =$$

$$= \sin(3\alpha - 2\alpha) = \sin \alpha. \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{в)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot 5 +$$

$$+ 1 \cdot (-1) \cdot (-4) - 2 \cdot (-2) \cdot (-4) - (-3) \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 5 = 13. \blacktriangleleft$$

4. Розв'язати рівняння:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 3x-2 & 4-x \\ -1 & 2x+3 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 6^{x+1} & 3^{2-5x} \\ 2^{3x} & 6^{2x-1} \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 2 & -x & 1 \\ 3x & 4 & x \\ 5 & 2x & 3 \end{vmatrix} = 28.$$

$\blacktriangleright$ а) За правилом розкриття визначника другого порядку отримуємо $(3x-2)(2x+3) - (4-x)(-1) = 0$, тобто $6x^2 + 4x - 2 = 0$. Розв'язками цього квадратного рівняння за формулами Вієта будуть $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. $\blacktriangleleft$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{б)} \begin{vmatrix} 6^{x+1} & 3^{2-5x} \\ 2^{3x} & 6^{2x-1} \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow 6^{x+1} \cdot 6^{2x-1} - 3^{2-5x} \cdot 2^{3x} = 0 \Leftrightarrow 6^{3x} = \\ &= 3^{2-5x} \cdot 2^{3x} \Leftrightarrow 3^{3x} \cdot 2^{3x} = 3^{2-5x} \cdot 2^{3x} \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^{2-5x} \Leftrightarrow 3x = \\ &= 2-5x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$\blacktriangleright$ в) Розкриваючи визначник третього порядку за правилом трикутників, маємо

$$\begin{vmatrix} 2 & -x & 1 \\ 3x & 4 & x \\ 5 & 2x & 3 \end{vmatrix} = 24 + (-5x^2) + 6x^2 - 4x^2 - (-9x^2) - 20 = 6x^2 + 4.$$

$$\text{Отже, } 6x^2 + 4 = 28 \Leftrightarrow 6x^2 = 24 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2. \blacktriangleleft$$

5. Обчислити визначники вищих порядків:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 7 & -4 & 3 \\ 11 & 6 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & 34 & 2 & -8 & 13 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

► а) Даний визначник четвертого порядку зручно розкрити за третім стовпцем

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + 3 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} + 4 \cdot A_{34} =$$

$$= 0 + 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 4 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(0 + (-2) + (-30) - 2 - 0 - 25) - 4(-1 + 12 + 0 - 10 - 0 - 15) =$$

$$= 233. \blacktriangleleft$$

► б) Обчислимо визначник, звівши його до трикутного вигляду. Нам буде зручно поміняти місцями перший та третій стовпці

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Замінивши в отриманому визначнику другий рядок сумою його з першим, помноженим на 2, а третій – сумою його з першим, помноженим на (-3) , матимемо

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 11 & 8 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & -14 & 12 \end{vmatrix}.$$

В останньому визначнику замінюємо третій рядок сумою його з другим, помноженим на $\left(-\frac{3}{11}\right)$, а останній – сумою його з другим

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 11 & 8 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & -14 & 12 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 11 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{-68}{11} & \frac{37}{11} \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{vmatrix}.$$

I, накінець, замінивши останній рядок сумою його з третім, помноженим на $\left(-\frac{33}{34}\right)$ в останньому отриманому визначнику, дістаємо визначник трикутного вигляду, який легко обчислюємо

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 11 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{-68}{11} & \frac{37}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{127}{34} \end{vmatrix} = -1 \cdot 11 \cdot \frac{-68}{11} \cdot \frac{127}{34} = 254. \blacktriangleleft$$

► в) Замінивши в даному визначнику п'ятого порядку другий рядок сумою його з першим, помноженим на (-2) , маємо

$$\begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 7 & -4 & 3 \\ 11 & 6 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & 34 & 2 & -16 & -18 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 17 & 1 & -8 & -9 \\ 11 & 6 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & 34 & 2 & -16 & -18 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 17 & 1 & -8 & -9 \\ 11 & 6 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & 2 \cdot 17 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-8) & 2 \cdot (-9) \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 17 & 1 & -8 & -9 \\ 11 & 6 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & 17 & 1 & -8 & -9 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

бо в останньому визначнику другий та четвертий рядки однакові. ◀

6. Перемножити матриці, якщо це можливо:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = (-2 \ 3 \ 0 \ 4), \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

► а) Розмірності даних матриць такі, що можна перемножити A на B , а також B на A . Отже, відповідно до правила множення, маємо

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 7 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 + 4 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 23 \\ 17 & -19 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ (-1) \cdot 7 + 4 \cdot 1 & (-1) \cdot 5 + 4 \cdot (-3) & (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 4 \\ 3 \cdot 7 + (-2) \cdot 1 & 3 \cdot 5 + (-2) \cdot (-3) & 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 7 & 8 \\ -3 & -17 & 14 \\ 19 & 21 & -2 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

► б) Серед даних матриць ми можемо перемножити: A на B ; B на A ; C на B .

Отже,

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = (-2 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 5) = (34),$$

$$AB = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4) \cdot (-2) & (-4) \cdot 3 & (-4) \cdot 0 & (-4) \cdot 4 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 4 \\ 5 \cdot (-2) & 5 \cdot 3 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 0 & -16 \\ -4 & 6 & 0 & 8 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ -10 & 15 & 0 & 20 \end{pmatrix},$$

$$CB = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-4) + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 \\ 0 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -13 \\ 11 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

7. Знайти $AB - BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright AB - BA &= \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-9) \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & (-9) \cdot 3 + 4 \cdot 5 \\ 7 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 7 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot (-9) + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \\ (-1) \cdot (-9) + 5 \cdot 7 & (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -22 & -7 \\ 13 & 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 44 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & -18 \\ -31 & 25 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Як бачимо, не можна стверджувати що $AB = BA$ навіть у випадку квадратних матриць однакової розмірності.

8. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ знайти обернену, якщо вона існує.

$$\blacktriangleright \det A = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 72 + 0 + (-40) - (-48) - 45 - 0 = 35 \neq 0,$$

отже, існує A^{-1} . Знаходимо алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 20, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 17,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -15,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -18, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -20, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -24,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -9.$$

$$\text{Тоді } A^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 20 & 17 & 2 \\ -15 & -18 & 2 \\ -20 & -24 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/7 & 17/35 & 2/35 \\ -3/7 & -18/35 & 2/35 \\ -4/7 & -24/35 & -9/35 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

9. Знайти ранги матриць:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 10 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\blacktriangleright$ а) На першому етапі елементарними перетвореннями над рядками матриці A доб'ємось, щоб усі елементи першого стовпця, які знаходяться нижче першого рядка, дорівнювали нулю. Для цього перший рядок залишимо без змін, другий рядок замінимо сумою його з першим, помноженим на (-3) , а третій – сумою його з першим, помноженим на 4 . Після цього отримаємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -7 \end{pmatrix} = B.$$

Матриця B ще не є матрицею трапецієвидного вигляду. Помінявши в ній місцями

другий та третій рядки, матимемо

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

Матриця C має трапецієвидний вигляд і у неї два ненульові рядки. Отже, $r(A) = 2$.



► б) Щоб уникнути роботи з дробовими числами під час елементарних перетворень, в даній матриці поміняємо місцями перший та останній рядки

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 10 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ 3 & -7 & 10 & -2 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

В матриці B перший рядок залишаємо без змін, на місце другого рядка ставимо суму його з першим, помноженим на 2, на місце третього – суму його з першим, помноженим на (-2) , а на місце четвертого – суму його з першим, помноженим на (-3) .

Отримаємо

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & -2 & -8 \end{pmatrix} = C.$$

В матриці C перші два рядки залишаємо без змін, на місце третього рядка ставимо суму його з другим, помноженим на 2, а на місце четвертого – суму його з другим, помноженим на (-4) . Маємо

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -40 \end{pmatrix} = D.$$

Залишивши в матриці D перші три рядки без змін, а на місце останнього записавши суму його з третім, помноженим на 2, остаточно отримуємо

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця має трапецієвидний вигляд і у неї три ненульові рядки. Тому

$$r(A) = 3.$$

Дана задача уже розв'язана. Додатково переконаємось, що остання матриця трапецієвидного вигляду має мінор третього порядку, відмінний від нуля, і усі мінори четвертого порядку дорівнюють нулю. Останнє очевидно, бо будь-який мінор четвертого порядку обов'язково містить нульовий рядок. Мінор, утворений із елементів, які знаходяться на перетині перших трьох рядків та першого, другого і четвертого стовпців, дорівнює

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \blacktriangleleft$$

10. Дослідити на сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку сумісності розв'язати їх:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7x - 5y - 3z = -5, \\ 4x - y - z = -7, \\ -x - 4y - 6z = 2, \\ 5x + 3y + 5z = -9. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} -4x_2 - 5x_3 - 5x_5 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + 9x_4 - 7x_5 = -13, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = -4, \\ 5x_1 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

► а) Запишемо розширену матрицю даної системи і з допомогою елементарних перетворень над рядками зведемо її до трапецієвидного вигляду. Одночасно зведеться до трапецієвидного вигляду і основна матриця системи. Для зручності відділятимемо останній стовпець вертикальною лінією

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Перший рядок залишимо без змін, другий рядок замінимо сумою його з першим, помноженим на 2, а третій – сумою його з першим, помноженим на (-3) . Отримаємо

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & 11 & 19 \\ 0 & 5 & -11 & -22 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & 11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right).$$

Останню матрицю трапецієвидного вигляду ми отримали з попередньої, замінивши третій рядок сумою його з другим. З цієї матриці ми бачимо, що $r(\bar{A}) = 3$, $r(A) = 2 \neq r(\bar{A})$

, тому за теоремою Кронекера-Капеллі дана система не має розв'язків. ◀

► б) Поступимо аналогічно як при розв'язуванні попереднього прикладу

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -5 & -3 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & -7 \\ -1 & -4 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & -9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -6 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & -7 \\ 7 & -5 & -3 & -5 \\ 5 & 3 & 5 & -9 \end{array} \right) = B$$

Матрицю B ми отримали, помінявши у матриці $\bar{A}$ місцями перший та третій рядки. Перший рядок у цій матриці залишимо без змін, другий рядок замінимо сумою його з першим, помноженим на 4, третій – сумою його з першим, помноженим на 7, а четвертий – сумою його з першим, помноженим на 5. Отримаємо

$$\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -17 & -25 & 1 \\ 0 & -33 & -45 & 9 \\ 0 & -17 & -25 & 1 \end{array} \right) = C.$$

В матриці C перші два рядки залишаємо без змін, на місце третього поставивши суму його з другим, помноженим на $(-33/17)$, а на місце четвертого – суму його з другим, помноженим на (-1) , матимемо

$$\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -17 & -25 & 1 \\ 0 & 0 & 60/17 & 120/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = D.$$

Матриця D має трапецієвидний вигляд. З неї ми бачимо, що $r(A) = r(\bar{A}) = 3 = n$. Тому наша система лінійних рівнянь сумісна, причому має єдиний розв'язок. За допомогою матриці D записуємо еквівалентну даній систему лінійних, яку легко розв'язуємо

$$\begin{cases} -x - 4y - 6z = 2, \\ -17y - 25z = 1, \\ \frac{60}{17}z = \frac{120}{17}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y - 6z - 2, \\ y = \frac{-25}{17}z - \frac{1}{17}, \\ z = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = -3, \\ z = 2. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

► в) Розширена матриця заданої системи чотирьох рівнянь з п'ятьма невідомими виглядатиме так

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -4 & -5 & 0 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & -1 & 9 & -7 & -13 \\ 1 & -3 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 5 & 0 & -3 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & -5 & -1 & 9 & -7 & -13 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & -3 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) = B.$$

Ми поміняли місцями в $\bar{A}$ перший та третій рядки і отриману матрицю позначили B . Перший рядок у цій матриці залишимо без змін, другий рядок замінимо сумою його з першим, помноженим на (-3) , третій – залишимо без змін, а четвертий замінимо сумою його з першим, помноженим на (-5) . Отримаємо

$$\bar{A} \square \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 15 & 7 & -12 & 22 & 23 \end{array} \right) = C.$$

У матриці C перший рядок залишаємо без змін, на місце третього ставимо суму його з другим, і, з метою уникнення роботи з дробами, на місце другого рядка ставимо різницю його, помноженого на 4 , з останнім, і четвертий рядок замінюємо другим

$$\bar{A} \square \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 13 & 12 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 5 & -1 \end{array} \right) = D.$$

У матриці D перші три рядки залишаємо без змін, а на місце останнього ставимо суму його з другим, помноженого на (-4)

$$\bar{A} \square \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 13 & 12 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -47 & -48 & 13 & 107 \end{array} \right) = P.$$

Матриця P ще не має трапецієвидного вигляду. Але, помінявши в ній місцями два останні рядки, отримуємо матрицю трапецієвидного вигляду

$$\bar{A} \square \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 13 & 12 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & -47 & -48 & 13 & 107 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

З останньої матриці, яка має трапецієвидний вигляд, бачимо, що $r(A) = r(\bar{A}) = 3 < 5 = n$. За цією матрицею записуємо систему лінійних рівнянь, еквівалентну заданій

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = -4, \\ x_2 + 13x_3 + 12x_4 - 2x_5 = -27, \\ -47x_3 - 48x_4 + 13x_5 = 107. \end{cases} \quad (4)$$

З останнього рівняння цієї системи знаходимо

$$x_3 = -\frac{107}{47} - \frac{48}{47}x_4 + \frac{13}{47}x_5. \quad (5)$$

З другого рівняння системи (4), враховуючи (5), отримуємо

$$\begin{aligned} x_2 = -27 - 13x_3 - 12x_4 + 2x_5 &= -27 - 13\left(-\frac{107}{47} - \frac{48}{47}x_4 + \frac{13}{47}x_5\right) - \\ &- 12x_4 + 2x_5 = \frac{122}{47} + \frac{60}{47}x_4 - \frac{75}{47}x_5. \end{aligned} \quad (6)$$

З першого рівняння системи (4) маємо $x_1 = -4 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 4x_5$. Підставивши сюди замість x_2 та x_3 вирази (5) та (6), знаходимо

$$x_1 = -\frac{36}{47} - \frac{87}{47}x_4 - \frac{11}{47}x_5. \quad (7)$$

У нашій системі невідомі x_4 та x_5 можуть приймати довільні значення. Тоді x_1 , x_2 та x_3 знаходяться за формулами (5) – (7). Тому, якщо взяти $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, то

$$x_1 = -\frac{36}{47} - \frac{87}{47}\alpha - \frac{11}{47}\beta, \quad x_2 = \frac{122}{47} + \frac{60}{47}\alpha - \frac{75}{47}\beta, \quad x_3 = -\frac{107}{47} - \frac{48}{47}\alpha + \frac{13}{47}\beta.$$

Таким чином, дана система лінійних рівнянь має безліч розв'язків, які мають вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{36}{47} - \frac{87}{47}\alpha - \frac{11}{47}\beta \\ \frac{122}{47} + \frac{60}{47}\alpha - \frac{75}{47}\beta \\ -\frac{107}{47} - \frac{48}{47}\alpha + \frac{13}{47}\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{47} \begin{pmatrix} -36 \\ 122 \\ -107 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{47} \begin{pmatrix} -87 \\ 60 \\ -48 \\ 47 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{47} \begin{pmatrix} -11 \\ -75 \\ 13 \\ 0 \\ 47 \end{pmatrix},$$

де α , β – довільні сталі. ◀

11. Розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - y = -1, \\ 7x - 3y = 1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 5y + z = 6, \\ 3x + y + 5z = 7, \\ -4x + 6y - 4z = -10. \end{cases}$$

► а) Для основної матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ даної квадратної системи маємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 7 = 1 \neq 0,$$

отже, можемо розв'язати систему матричним методом. Для матриці A шукаємо алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = -3, \quad A_{21} = -(-1) = 1, \quad A_{12} = -7, \quad A_{22} = 2,$$

тому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до (12) маємо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ (-7) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix},$$

тобто $x = 4, y = 9$ – шуканий розв'язок. ◀

► б) Запишемо основну матрицю системи та обчислимо її визначник

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 100 + 18 - 60 - 60 + 4 = -6 \neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -34, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -26,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 22, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 17.$$

Тоді, враховуючи (1) та (12), знаходимо шуканий розв'язок

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -34 & -14 & -26 \\ -8 & -4 & -7 \\ 22 & 8 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -42 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

тобто, $x = 7, y = 1, z = -3$. ◀

12. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x + 4y = 0, \\ 6x + 7y = -11. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -2x + 3y - 4z = 3, \\ x + 7y - 3z = -7, \\ -5y + 2z = 7. \end{cases}$$

► а) Знаходимо

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 24 = 11 \neq 0,$$

тому обчислюємо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -11 & 7 \end{vmatrix} = 44, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -11 \end{vmatrix} = -55.$$

Тоді, за формулами Крамера, отримуємо шуканий розв'язок

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{44}{11} = 4, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-55}{11} = -5. \quad \blacktriangleleft$$

► б) Обчислимо визначник основної матриці даної системи лінійних рівнянь

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 7 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -28 + 0 + 20 - (-30) - 6 - 0 = 16 \neq 0.$$

Далі, відповідно до методу Крамера, знаходимо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -7 & 7 & -3 \\ 7 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 42 - 63 - 140 - 45 + 42 + 196 = 32,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -7 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 28 + 0 - 28 - 42 - 6 - 0 = -48,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & -7 \\ 0 & -5 & 7 \end{vmatrix} = -98 + 0 - 15 + 70 - 21 - 0 = -64.$$

За формулами (15) маємо

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-48}{16} = -3, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-64}{16} = -4.$$

13. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -3x_1 + 7x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 9x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -4x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

► Маємо однорідну систему чотирьох рівнянь з п'ятьма невідомими. Отже, ранг основної (як і розширеної) матриці не перевищує чотирьох, тому, навіть не розв'язуючи дану систему, можемо сказати, що вона має нетривіальні розв'язки і їх безліч. Запишемо основну матрицю системи і елементарними перетвореннями над рядками зведемо її до трапецієвидного вигляду. Розширену матрицю записувати немає потреби, бо вона

відрізняється від основної нульовим стовпцем вільних членів і при елементарних перетвореннях над рядками він не змінюватиметься.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 & -2 & -1 \\ 9 & -5 & -2 & -4 & -5 \\ -5 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & -7 & -7 \\ 9 & -5 & -2 & -4 & -5 \\ -5 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = B.$$

Замінивши в A перший рядок різницею його з четвертим, отримали еквівалентну їй матрицю, яку позначили B . Перший рядок у цій матриці залишимо без змін, другий рядок замінімо сумою його з першим, помноженим на (-9) , третій – сумою його з першим, помноженим на 5 , а четвертий – сумою його з першим, помноженим на 4 . Отримаємо

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & -7 & -7 \\ 0 & 31 & -74 & 59 & 58 \\ 0 & -19 & 43 & -36 & -36 \\ 0 & -12 & 31 & -23 & -22 \end{pmatrix} = C.$$

З метою уникнення роботи з великими числами у матриці C замінімо другий рядок сумою його з останнім, помноженим на 3 , а четвертий – різницею його з останнім

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & -7 & -7 \\ 0 & -5 & 19 & -10 & -8 \\ 0 & -7 & 12 & -13 & -14 \\ 0 & -12 & 31 & -23 & -22 \end{pmatrix} = D.$$

У матриці D перші два рядки залишаємо без змін, на місце останнього ставимо різницю його з сумою другого та третього, а на місце третього – суму його з другим, помноженим на $(-7/5)$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & -7 & -7 \\ 0 & -5 & 19 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & -73/5 & 1 & -14/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P.$$

Матриця P має трапецієвидний вигляд. Ми бачимо, що $r(A) = 3 < 5 = n$. За цією матрицею запишемо систему лінійних рівнянь, еквівалентну заданій

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 8x_3 - 7x_4 - 7x_5 = 0, \\ -5x_2 + 19x_3 - 10x_4 - 8x_5 = 0, \\ -\frac{73}{5}x_3 + x_4 - \frac{14}{5}x_5 = 0. \end{cases} \quad (17)$$

З останнього рівняння цієї системи знаходимо

$$x_4 = \frac{73}{5}x_3 + \frac{14}{5}x_5. \quad (18)$$

З другого рівняння системи (17), враховуючи (18), отримуємо

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{19}{5}x_3 - 2x_4 - \frac{8}{5}x_5 = \frac{19}{5}x_3 - 2\left(\frac{73}{5}x_3 + \frac{14}{5}x_5\right) - \frac{8}{5}x_5 = \\ &= -\frac{127}{5}x_3 - \frac{36}{5}x_5. \end{aligned} \quad (19)$$

З першого рівняння системи (17) маємо $x_1 = 4x_2 - 8x_3 + 7x_4 + 7x_5$. Підставивши сюди замість x_2 та x_4 вирази (18) та (19), знаходимо

$$x_1 = -\frac{37}{5}x_3 - \frac{11}{5}x_5. \quad (20)$$

Отже, ми з'ясували, що у нашій системі невідомі x_3 та x_5 можуть приймати довільні значення. Тоді невідомі x_1 , x_2 та x_4 тоді знаходяться за формулами (18) – (20). Тому, якщо взяти $x_3 = 5\alpha$, $x_5 = 5\beta$, то $x_1 = -77\alpha - 11\beta$, $x_2 = -137\alpha - 36\beta$, $x_4 = 73\alpha + 14\beta$.

Таким чином, розв'язки даної системи лінійних рівнянь мають вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37\alpha - 11\beta \\ -127\alpha - 36\beta \\ 5\alpha \\ 73\alpha + 14\beta \\ 5\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -37 \\ -127 \\ 5 \\ 73 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -11 \\ -36 \\ 0 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix},$$

де α , β – довільні сталі. ◀

14. Визначити, при яких λ однорідна система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ 4x + 5y - 3z = 0, \\ 7x + \lambda y - 4z = 0 \end{cases}$$

має нетривіальні розв'язки і знайти ці розв'язки.

► Маємо квадратну систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими. Необхідною і достатньою умовою існування нетривіальних розв'язків такої системи є виродженість її основної матриці. Знайдемо λ , при яких $\det A = 0$,

$$0 = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 7 & \lambda & -4 \end{vmatrix} = -40 + 21 + 4\lambda + 6\lambda - 16 - 35 = 10\lambda - 70,$$

звідки $\lambda = 7$. Підставивши в систему це значення, шукаємо нетривіальні розв'язки. Очевидно, при цьому значенні дана система набуде вигляду

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ 4x + 5y - 3z = 0, \\ 7x + 7y - 4z = 0. \end{cases}$$

Елементарними перетвореннями зведемо основну матрицю цієї системи до трапецієвидного вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 7 & 7 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 21/2 & -15/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Ми спочатку перший рядок матриці A залишили без змін, другий рядок замінили сумою його з першим, помноженим на (-2) , а третій – сумою його з першим, помноженим на $(-7/2)$. Потім в отриманій матриці перші два рядки залишили без змін, а третій замінили сумою його з другим, помноженим на $(-3/2)$, і дістали таким чином матрицю B трапецієвидного вигляду, еквівалентну A . Відповідно до матриці B записуємо систему лінійних рівнянь, еквівалентну даній, і легко знаходимо розв'язок

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ 7y - 5z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} - \frac{z}{2}, \\ y = \frac{5}{7}z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{z}{7}, \\ y = \frac{5}{7}z. \end{cases}$$

Невідому z можемо брати довільною. Взявши $z = 7\alpha$, матимемо $x = -\alpha$, $y = 5\alpha$. Отже, шукані розв'язки мають вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 5\alpha \\ 7\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},$$

де α – довільна стала. Очевидно, при усіх $\alpha \neq 0$ розв'язки будуть нетривіальними. ◀