

Завдання для самостійного розв'язання

1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ знайти:

а) $B + B^T$; б) $B - B^T$; в) $7A^T - 3B$.

2. Якою повинна бути матриця A , щоб $A + A^T = \Theta$?

3. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} 2\alpha & -1 \\ \cos 4\alpha & \sin 4\alpha \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & -b & a \\ b & 1 & -b \\ a & b & a \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати рівняння та нерівності:

а) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \cos 4x & \sin 4x \end{vmatrix} = 1$; б) $\begin{vmatrix} x+2 & 3-x \\ 5-x & 2x-4 \end{vmatrix} < x-5$;

в) $\begin{vmatrix} x & 3 & -2x \\ 1 & -x & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} \geq 5x-15$.

5. Обчислити визначники вищих порядків:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 7 & -4 & 3 \\ 11 & 6 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & 34 & 2 & -8 & 13 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -7 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 8 & 3 & 0 & 2 & -2 & 9 \\ 6 & 4 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

6. Перемножити матриці, якщо це можливо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Чи можна обчислити $AB - BA$ для матриць, заданих в задачі 6а? Якими повинні бути матриці якщо A та B , щоб можна було обчислити $AB - BA$?

8. Для заданих матриць знайти обернені, якщо вони існують:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & -8 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. Знайти ранги матриць:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & -2 & 9 \\ -8 & -11 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

10. Дослідити на сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку сумісності розв'язати їх:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - y = 3, \\ 6x - 3y = 7; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - y = 3, \\ 6x - 3y = 9; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 3, \\ 5x_1 + 3x_2 = 8, \\ 9x_1 + 2x_2 = 11; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} -3x + y - 2z = 6, \\ 2x + 5y + 4z = 1, \\ 5x + 4y + 6z = -5; \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 7, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$$

11. Розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x - 13y = 9, \\ 13x - 14y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -11, \\ 8x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

12. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -2, \\ 4x_1 + x_2 = 9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - 11y + 2z = 7, \\ 2x + 9y - z = 14, \\ -4x + 7y - 6z = 4. \end{cases}$$

13. Розв'язати однорідні системи лінійних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x - y + 3z = 0, \\ 2x + 7y - z = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 5x + y - 7z = 0, \\ 4x + 3y + z = 0, \\ 3x + y - 3z = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 4x_1 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

14. Визначити, при яких λ однорідна система лінійних рівнянь має нетривіальні розв'язки, і знайти ці розв'язки:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 6y = 0, \\ 2x - \lambda y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + y + 5z = 0, \\ 2x + y + 2z = 0, \\ \lambda x + y - 7z = 0; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x - 3z = 0, \\ 3x + \lambda y - z = 0, \\ 5x + 2y - 4z = 0. \end{cases}$$

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. а) $\begin{pmatrix} 14 & 7 & -4 \\ 7 & -4 & 3 \\ -4 & 3 & 12 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 46 \\ -19 & 41 & -2 \\ 43 & -21 & 10 \end{pmatrix}$.

2. $A = \|a_{ij}\|_n^n$ і при цьому $a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} = 0$ при всіх $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$.

3. а) 1; б) 12; в) $4ab^2$.

4. а) $x = \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $x \in (-9; 2)$; в) $x \in [-3; 4]$.

5. а) 0; б) 30; в) -2247; г) -720.

6. а) $AB = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 4 \\ -13 & 6 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & -4 \\ 4 & -16 & 8 \end{pmatrix}$, $DC = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$,

$BD = \begin{pmatrix} -36 & -16 & -27 \end{pmatrix}$, $AC = (16)$.

7. Не можна. Матриці A та B повинні бути квадратними однакової розмірності.

8. а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -10 & 8 & 11 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; в) не існує.

9. а) 2; б) 2; в) 3.

10. а) система не сумісна;

б) $x = \alpha$, $y = 2\alpha - 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

в) $x = 1$, $y = 1$;

г) $x = -\frac{29}{17} + \frac{14}{17}\alpha$, $y = \frac{15}{17} - \frac{8}{17}\alpha$, $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

д) система не сумісна.

11. а) $x = -1$, $y = -1$;

б) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

12. а) $x_1 = 4$, $x_2 = -7$;

б) $x = 5$, $y = 0$, $z = -4$

13. а) $x = -2\alpha$, $y = \alpha$, $z = 3\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

б) $x = 2\alpha$, $y = -3\alpha$, $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

в) $x_1 = -2\alpha$, $x_2 = 5\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = 3\alpha$, $x_5 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

14. а) $\lambda = -4$: $x = -2\alpha$, $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

б) $\lambda = -1$: $x = -3\alpha$, $y = 4\alpha$, $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

в) $\lambda = 2$: $x = 6\alpha$, $y = -7\alpha$, $z = 4\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$