

Приклади розв'язання задач

1. Знайти координати точки A , яка є початком вектора $\vec{a} = (2, 0, 3)$, якщо його кінець розміщується в точці $B(4, 1, 2)$.

► Нехай точка A має координати (x_0, y_0, z_0) тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати $(4 - x_0, 1 - y_0, 2 - z_0)$. Із рівності векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\vec{a}$ маємо рівняння $4 - x_0 = 2$; $1 - y_0 = 0$; $2 - z_0 = 3$. Розв'язавши їх, знаходимо $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $z_0 = -1$. Отже точка A має координати $(2; 1; -1)$. ◀

2. Знайти косинуси кутів, які вектор $\overrightarrow{AB}$ утворює з координатними осями, якщо $A(-1, -2, 3)$ і $B(1, -3, 5)$.

► Маємо $\overrightarrow{AB} = (1 - (-1); -3 - (-2); 5 - 3)$, тобто $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 2)$. Тоді $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$, тому $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = \frac{-1}{3}$, $\cos \gamma = \frac{2}{3}$. ◀

3. У паралелограмі $ABCD$ задано координати трьох вершин $A(1; -3; 3)$, $B(3; 2; 1)$ і $C(6; 4; 4)$. Знайти координати четвертої вершини D .

► У паралелограмі $ABCD$ сторони BC і AD рівні і паралельні. Тому вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ рівні. Виходячи з умови, знаходимо $\overrightarrow{BC} = (6 - 3; 4 - 2; 4 - 1) = (3; 2; 1)$. Нехай вершина D має координати (x, y, z) , тоді вектор $\overrightarrow{AD}$ має координати $(x - 1, y + 3, z - 3)$. Із рівності $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ відносно невідомих (x, y, z) маємо $x - 1 = 3$; $y + 3 = 2$; $z - 3 = 1$. З цих рівностей знаходимо $x = 4$, $y = -1$, $z = 4$. Отже вершина D має координати $D(4; -1; 4)$. ◀

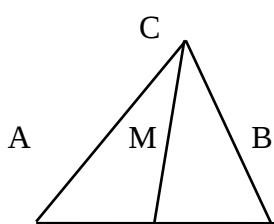


Рисунок 3

4. Задано три вершини трикутника $A(-1; 2)$, $B(3; 2)$ і $C(5; 5)$. Знайти довжину медіани, опущеної з вершини C на сторону AB .

► Оскільки медіана поділяє навпіл сторону AB , то точка M перетину медіани зі стороною є серединою відрізка AB . Отже, її

координати $x = \frac{-1+3}{2} = 1$; $y = \frac{2+2}{2} = 2$. Тоді довжину медіани знаходимо,

як довжину відрізка CM

$$|CM| = \sqrt{(1-5)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5. \quad \blacktriangleleft$$

5. Знайти довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ та $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

► Згідно правила паралелограма додавання векторів, довжина однієї діагоналі паралелограма дорівнює $|\vec{a} + \vec{b}|$, а іншої – $|\vec{a} - \vec{b}|$. Знайдемо ці вектори та обчислимо їх

довжини. Отримаємо $\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$. Отже,

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}, \quad |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{51}. \quad \blacktriangleleft$$

6. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

► Відповідно до властивостей скалярного добутку отримуємо, що

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{p} + 4\vec{q})(2\vec{p} - \vec{q}) = 2\vec{p} \cdot \vec{p} - \vec{p} \cdot \vec{q} + 8\vec{q} \cdot \vec{p} - 4\vec{q} \cdot \vec{q} = \\ &= 2|\vec{p}|^2 + 7\vec{p} \cdot \vec{q} - 4|\vec{q}|^2 = 2 \cdot 7^2 + 7 \cdot 2 \cos \frac{2\pi}{3} - 4 \cdot 2^2 = \\ &= 98 + 98 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 16 = 32. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

7. Задано вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, причому $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 60° . Знайти модуль вектора $\vec{c}$.

► Використовуючи формулу $\vec{c}^2 = |\vec{c}|^2$, одержимо, що

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{(2\vec{a} + 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2}.$$

Оскільки $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 4^2 = 16$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 5^2 = 25$,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 10,$$

то $|\vec{c}| = \sqrt{4 \cdot 16 + 12 \cdot 10 + 9 \cdot 25} = \sqrt{409} \approx 20,22$. ◀

8. Дано вектори $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$. Обчислити $(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{b} - 3\vec{a})$.

► Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами, то маємо

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) = (1; -2; 3) + 2(3; 0; -1) = (7; -2; 1),$$

$$(\vec{b} - 3\vec{a}) = (3; 0; -1) - 3(1; -2; 3) = (0; 6; -10).$$

Враховуючи формулу скалярного добутку для векторів, заданих своїми координатами, отримуємо

$$(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{b} - 3\vec{a}) = 7 \cdot 0 + (-2) \cdot 6 + 1 \cdot (-10) = -22. \quad \blacktriangleleft$$

9. При яких значеннях t вектори $\vec{c} = (t - 5; 2; 4)$ і $\vec{d} = (t; 4t - 1; -2)$ будуть перпендикулярними?

► Якщо вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ перпендикулярні, то $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0$, тобто $t(t - 5) + 2(4t - 1) - 8 = 0$, або $t^2 + 3t - 10 = 0$. Розв'язуючи дане рівняння, отримуємо $t_1 = -5$, $t_2 = 2$. ◀

10. У трикутнику з вершинами $A(2;-1;3)$, $B(-2;2;5)$, $C(1;2;3)$. Знайти косинус кута при вершині A .

► Кут при вершині A будемо шукати як кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Отже, $\overrightarrow{AB} = (-4; 3; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 3; 0)$. Тоді

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-4 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 2^2} \sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{29} \sqrt{10}} \approx 0,763. \blacktriangleleft$$

11. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна трьох сил $\vec{F}_1 = (3; -4; 5)$, $\vec{F}_2 = (2; 1; -4)$ та $\vec{F}_3 = (-3; 5; 2)$, прикладена до точки, яка прямолінійно переміщується з положення $A(4; 2; -3)$ у положення $B(6; 4; 1)$.

► Обчислимо силу $\vec{F}$, яка є рівнодієюною трьох сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ та $\vec{F}_3$,

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (3 + 2 - 3; -4 + 1 + 5; 5 - 4 + 2) = (2; 2; -2).$$

Вектор переміщення $\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (2; 2; 4)$. Отже, робота $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 0$. $\blacktriangleleft$

12. Нехай $\vec{a} = (-3; 3; 8)$, $\vec{b} = (3; -2; -6)$. Обчислити векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$. Чому дорівнює площа паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

► Нехай $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – ортонормований базис, в якому задані вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Тоді

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 8 \\ 3 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= -2\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}. \end{aligned}$$

Тепер можемо знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$,

$$S_{\text{пар.}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-3)^2} = 7. \blacktriangleleft$$

13. Обчислити площу паралелограма побудованого на векторах $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ та $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

► Відповідно до властивостей векторного добутку, маємо:

$$\begin{aligned} \vec{c} \times \vec{d} &= (2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{a} + 6\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - 3\vec{b} \times \vec{b} = 2 \cdot 0 + \\ &+ 6\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} - 3 \cdot 0 = 7\vec{a} \times \vec{b}. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } S = 7|\vec{a} \times \vec{b}| = 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 42. \blacktriangleleft$$

14. Знайти довжину висоти трикутника ABC з вершинами у точках $A(1;3;1)$, $B(3;2;-2)$, $C(6;2;0)$, проведеної з вершини A .

► Нехай AH – висота трикутника ABC , проведена з вершини A . Тоді площа $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AH}| |\overrightarrow{BC}|$. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма побудованого на векторах $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$ та їх векторний добуток: $\overrightarrow{BA} = (2; -1; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (3; 0; 2)$,

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 13\vec{j} + 3\vec{k}.$$

$$\text{Отже, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 13^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{182}}{2}.$$

$$\text{Тоді } \frac{\sqrt{182}}{2} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AH}| |\overrightarrow{BC}|, \text{ звідки } |\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{182}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\sqrt{182}}{\sqrt{9+4}} = \sqrt{14}. \blacktriangleleft$$

15. Знайти об'єм піраміди з вершинами у точках $O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$.

$$\blacktriangleright \overrightarrow{OA} = \{5; 2; 0\}, \overrightarrow{OB} = \{2; 5; 0\}, \overrightarrow{OC} = \{1; 2; 4\}.$$

Із елементарної геометрії відомо, що об'єм піраміди, побудованої на ребрах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, дорівнює $1/6$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на тих же ребрах. Отже,

$$V_{nir} = \frac{1}{6} V_{npr} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC})|.$$

Спочатку шукаємо мішаний добуток цих векторів

$$(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 84.$$

$$\text{Таким чином, } V_{nir} = \frac{1}{6} \cdot 84 = 14 (\text{куб.од.}). \blacktriangleleft$$