

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти координати вектора $\overline{AB}$, його довжину, та напрямні косинуси, якщо:

а) $A = (3, 1, 2)$, $B = (1, 0, 1)$;

б) $A = (3, -2, 2)$, $B = (-1, 3, 2)$;

в) $A = (7, 1, -3)$, $B = (4, 0, 2)$;

г) $A = (0, -1, 2)$, $B = (1, -1, 4)$.

2. Дано $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

3. У паралелограмі $ABCD$ дано координати трьох його вершин $A(3; -4; 7)$, $B = (-5, 3, -2)$ і $C = (1, 2, -3)$. Знайти координати четвертої вершини D , протилежної вершині B .

4. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ та $\vec{b} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ будуть колінеарні?

5. Точка $C(2; 2; 4)$ ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = 2/3$. Знайти координати точки B , якщо $A(-2; 4; 0)$.

6. Знайти довжину медіани трикутника з вершинами у точках $A(1; -3; 2)$, $B(3; 0; 6)$, $C(3; 2; 6)$, проведеної з вершини A .

7. Вектори $\vec{a} = (-2; 4; 7)$, $\vec{b} = (0; 1; 2)$, $\vec{c} = (1; 0; 1)$ утворюють базис. Знайти розклад вектора $\vec{d} = (-1; 2; 4)$ за цим базисом.

8. Встановити вид чотирикутника $ABCD$ з вершинами у точках $A(-1; -2)$, $B(2; -5)$, $C(1; -2)$, $D(-2; 1)$.

9. Відрізок, обмежений точками $A(2; -7; 9)$ та $B(8; 11; -3)$, поділили точками C і D у відношенні $1:2:3$. Знайти координати цих точок.

10. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}| = 5$ і $|\vec{b}| = 12$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

11. Обчислити периметр трикутника, якщо координати його вершин $A(-3; -6)$, $B(4; -1)$ та $C(5; -2)$.

12. Точка, рухаючись рівномірно та прямолінійно, за 4 секунди перемістилась із положення $A(6; -7)$ в положення $B(-4; -5)$. Де знаходилась точка в момент часу: 2 секунди; 3 секунди?

13. Задано вектори $\vec{a} = (2; -1; 4)$ та $\vec{b} = (3; -1; 6)$. Обчислити:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $(2\vec{a} - 3\vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

14. Визначити внутрішні кути трикутника з вершинами $A(0;0;5)$, $B(1;1;1)$, $C(-1;2;3)$

15. Обчислити натуральне значення x , при якому вектори $\vec{a} = (x; 1; 3)$ і $\vec{b} = (x; -x; -2)$ будуть перпендикулярними.

16. Задані точки A, B, C . Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ і проекцію вектора $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, якщо:

а) $A(-2;4;6)$, $B(0;2;-4)$, $C(-6;8;-10)$;

б) $A(1;4;-1)$, $B(-2;4;-5)$, $C(8;4;0)$.

17. Обчислити роботу, що її виконує сила $\vec{F} = (4;5;2)$, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, перемістилась із положення $A(3;-7;1)$ у положення $B(6;-1;-2)$.

18. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна трьох сил $\vec{F}_1 = (5;-3;1)$, $\vec{F}_2 = (4;2;-6)$, $\vec{F}_3 = (-5;-3;7)$, прикладена до точки, яка прямолінійно переміщується з положення $A(-5;3;7)$ у положення $B(-3;2;4)$.

19. Дано точки $A(-2;3;-4)$, $B(3;2;5)$, $C(1;-1;2)$, $D(3;2;-4)$. Обчислити $np_{\overline{CD}} \overline{AB}$.

20. Знайти площу трикутника ABC , якщо:

а) $A(1;2;0)$, $B(3;0;3)$, $C(5;2;6)$;

б) $A(3;1;4)$, $B(3;5;1)$, $C(7;-4;4)$;

в) $A(1;-1;2)$, $B(1;3;-1)$, $C(5;-6;2)$;

г) $A(3;-2;1)$, $B(-4;-2;0)$, $C(-1;-2;4)$.

21. Задано вершини трикутника ABC . Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC :

а) $A(1;-1;3)$, $B(5;1;0)$, $C(2;1;1)$;

б) $A(6;1;5)$, $B(5;1;0)$, $C(3;1;1)$;

в) $A(3;2;-2)$, $B(1;3;1)$, $C(6;2;0)$;

г) $A(3;0;6)$, $B(1;-3;2)$, $C(3;2;5)$.

22. Обчислити площу трикутника побудованого на векторах $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

23. Знайти момент сили $\vec{F} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, прикладеної до точки $A(-2; -1; 2)$, відносно точки $O(-3; 0; -1)$.

24. Знайти величину моменту сили $\vec{F} = -\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, прикладеної до точки $A(3; 5; -1)$, відносно точки $O(2; 3; -1)$.

25. Обчислити мішаний добуток векторів $\vec{a} = (1; -1; -3)$, $\vec{b} = (2; 3; 1)$, $\vec{c} = (2; 3; 4)$.

26. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$ та $\vec{c} = -2\vec{i} - \vec{k}$.

27. Обчислити об'єм піраміди з вершинами у точках:

а) $A(3; 2; -2)$, $B(1; 3; 1)$, $C(6; 2; 0)$, $D(0; 2; 2)$;

б) $A(3; 4; 5)$, $B(1; 2; 1)$, $C(-2; -3; 6)$, $D(3; -6; -3)$;

в) $A(1; 3; 1)$, $B(-1; 4; 6)$, $C(-2; -3; 4)$, $D(3; 4; -4)$;

г) $A(2; 4; 1)$, $B(-3; -2; 4)$, $C(3; 5; -2)$, $D(4; 2; -3)$.

28. З'ясувати, чи лежать точки $A(2; 3; 1)$, $B(0; -1; 1)$, $C(6; 1; 4)$, $D(2; -1; 3)$ на одній площині.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. а) $\vec{AB} = (-2; -1; -1)$, $|\vec{AB}| = \sqrt{6}$, $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{6}}$, $\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{6}}$;

б) $\vec{AB} = (-4; 5; 0)$, $|\vec{AB}| = \sqrt{41}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos \beta = \frac{5}{\sqrt{41}}$, $\cos \gamma = 0$;

в) $\vec{AB} = (-3; -1; 5)$, $|\vec{AB}| = \sqrt{35}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{35}}$, $\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{35}}$, $\cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{35}}$;

г) $\vec{AB} = (1; 0; 2)$, $|\vec{AB}| = \sqrt{5}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$. 3. $D(9; -5; 6)$. 4. $\alpha = -1$, $\beta = 4$.

5. $B(8; -1; 10)$. 6. 6. 7. $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

8. $ABCD$ – паралелограм. 9. $C(3; -4; 7)$, $D(5; 2; 3)$.

10. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 13$. 11. $\sqrt{74} + \sqrt{2} + \sqrt{80}$.

12. $(1; -6)$, $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{11}{2}\right)$. 13. а) 31; б) -1.

14. $45^0, 45^0, 90^0$. 15. 3.

16. а) $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{6}}$, $np_{\overline{AB}+\overline{AC}}(3\overline{AB}-2\overline{AC}) = -\frac{18}{\sqrt{19}}$;

б) $\alpha = 135^0$, $np_{\overline{AB}+\overline{AC}}(3\overline{AB}-2\overline{AC}) = -10$.

17. 36. 18. 6. 19. $np_{\overline{CD}}\overline{AB} = -\frac{47}{7}$.

20. а) $\frac{\sqrt{65}}{2}$; б) 12,5; в) 12,5; г) 12,5.

21. а) $\frac{\sqrt{65}}{3}$; б) $\frac{11}{5}$; в) $\sqrt{14}$; г) $\sqrt{\frac{141}{5}}$.

22. $21\sqrt{3}$. 23. $\vec{M}(2; -1; -1)$. 24. 3.

25. 15. 26. 2.

27. а) 3; б) 42; в) 3; г) $\frac{25}{3}$.

28. Не лежать на одній площині.