

§ 1. Елементи векторної алгебри

1.1 Лінійні операції над векторами

Вектором (геометричним вектором) називають напрямлений відрізок, у якого одна з його обмежуючих точок береться за початок, а друга – за кінець. Якщо A – початок вектора, а B – його кінець, то вектор позначається символом $\overrightarrow{AB}$. Вектор позначають також і символом $\vec{a}$. Напрямок вектора на рисунку позначають стрілкою (рис. 1)

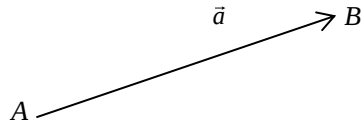


Рисунок 1

Довжиною (модулем) $|\overrightarrow{AB}|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ називається число, що дорівнює довжині відрізка AB . Якщо вектор позначають через $\vec{a}$, то його модуль позначається через $|\vec{a}|$. Вектор, у якого кінець збігається з початком, називається *нульовим* і позначається $\vec{0}$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які лежать на одній прямій, або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Якщо ж вектори в просторі лежать на одній площині або на паралельних площинах, то вони називаються *компланарними*.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, називаються *рівними*, якщо вони: 1) мають однакові модулі; 2) колінеарні; 3) напрямлені в один бік. У цьому випадку пишуть $\vec{a} = \vec{b}$.

Для кожного ненульового вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор, який позначається символом $-\vec{a}$. Вектор $-\vec{a}$ має модуль, який дорівнює модулю вектора $\vec{a}$, колінеарний з ним, але напрямлений у протилежний бік.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ називається вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, що колінеарний вектору $\vec{a}$, довжина якого $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$, а напрямок збігається з напрямком вектора $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ і протилежний при $\lambda < 0$.

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець з кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ знаходиться в кінці вектора $\vec{a}$ (рис. 2).

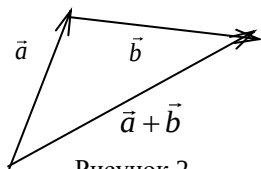


Рисунок 2

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним*.

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ з коефіцієнтами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ називається вектор $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається *лінійно незалежною*, якщо з рівності $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ випливає, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ *лінійно залежна*, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не всі рівні одночасно нулеві, що $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$.

Два колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – лінійно залежні й один виражається через інший, $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, $\lambda \neq 0$. Два неколінеарні вектори лінійно незалежні.

Три компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – лінійно залежні, а три некомпланарні – лінійно незалежні.

Будемо казати, що впорядкована трійка не компланарних векторів утворює *праву трійку*, якщо, дивлячись з кінця останнього вектора, найкоротший поворот від першого до другого здійснюється проти годинникової стрілки, при умові, що початки усіх трьох векторів суміщені в одній точці. У протилежному випадку трійку називають *лівою*.

Базисом системи векторів називають таку її підсистему, вектори якої лінійно незалежні, а будь який вектор системи лінійно виражається через вектори підсистеми.

На площині – базисом є два неколінеарні вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$. Довільний вектор $\vec{a}$ що компланарний цим векторам, лінійно виражається через них: $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$ де a_1 , a_2 – числа, які називаються координатами вектора $\vec{a}$ у базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ і записують так: $\vec{a} = (a_1, a_2)$. У тривимірному просторі базисом є три некомпланарні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$. Будь який вектор $\vec{a}$ тривимірного простору лінійно виражається через них: $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$, де a_1 , a_2 , a_3 – числа, які називаються координатами вектора $\vec{a}$ у базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, і записують так: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Базис називається *ортонормованим*, якщо його базисні вектори попарно перпендикулярні та мають одиничну довжину. У тривимірному просторі їх позначають векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, при умові, що $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – права трійка, а на площині – $\vec{i}$, $\vec{j}$, причому найкоротший рух від $\vec{i}$ до $\vec{j}$ здійснюється проти годинникової стрілки.

Нехай векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ утворюють ортонормований базис і є ортами координатних осей прямокутної системи координат $Oxyz$. Тоді довільний вектор $\vec{a}$ в цій системі координат однозначно розкладається $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ і має координати $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Якщо вектор $\overline{AB} = (a_x, a_y, a_z)$ задається двома точками простору з координатами $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то його координати визначаються за формулами

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1.$$

Довжина вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ визначається формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Якщо вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ утворює кути α, β, γ з координатними осями Ox , Oy , Oz , то косинуси цих кутів називаються *напрямними* і визначаються за формулами

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

З цих формул легко отримуємо $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Нехай задано два вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тоді вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *рівні*, якщо $a_x = b_x$,

$$a_y = b_y, \quad a_z = b_z, \text{ і колінеарні, якщо } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Суму, різницю та добуток вектора на число визначають відповідними арифметичними операціями над їх координатами

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z), \quad \lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Нехай на прямій задано три різні точки A , B та C . Вектори $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{CB}$ колінеарні, а тому знайдеться таке дійсне число λ , що $|\overrightarrow{AC}| = \lambda \cdot |\overrightarrow{CB}|$. Число λ називається відношенням, в якому точка C ділить напрямлений відрізок AB ($\lambda \neq -1$). Якщо відомо координати точок A і B та відношення λ , в якому точка C ділить напрямлений відрізок AB , то координати точки C знаходяться за формулами

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}.$$

1.2 Скалярний добуток

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих сторін на косинус кута φ між ними (позначають $\vec{a} \cdot \vec{b}$)

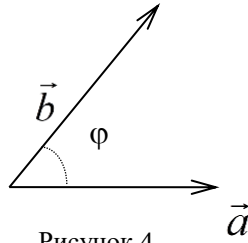


Рисунок 4

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Проекцією вектора $\vec{b}$ на ненульовий вектор $\vec{a}$ називається число $np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi$. З цього означення і означення скалярного добутку бачимо, що

$$np_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

Поняття скалярного добутку використовується у фізиці при обчисленні роботи постійної сили $\vec{F}$ при переміщенні точки вздовж вектора $\vec{S}$. Якщо вектор $\vec{a} = \vec{F}$ – сила, $\vec{b} = \vec{S}$ – шлях переміщення точки, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos \varphi = A$ – робота сили $\vec{F}$ на шляху $\vec{S}$.

Властивості скалярного добутку:

$$1^0 \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$2^0 (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$3^0 (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c};$$

$$4^0 \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = |\vec{a}|^2;$$

$$5^0 \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ тоді і тільки тоді, коли } \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

1.3 Векторний добуток

Векторним добутком неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (позначають $\vec{a} \times \vec{b}$) називають вектор $\vec{c}$, який має такі властивості:

- 1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 2) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- 3) трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ права.

Властивості векторного добутку векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$:

$$1^0 \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \text{ тоді і тільки тоді, коли вектори } \vec{a} \text{ та } \vec{b} \text{ колінеарні};$$

$$2^0 \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$$

$$3^0 \quad \lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b});$$

$$4^0 \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c};$$

5⁰ довжина векторного добутку двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ($|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$) дорівнює площі паралелограма побудованого на цих векторах;

$$6^0 \quad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \text{ де } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ – вектори ортонормованого базису};$$

$$7^0 \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$$

Розглянемо вектор сили $\vec{F}$, прикладеної до точки B . Векторний добуток $\overline{AB} \times \vec{F}$ є моментом $\vec{M}$ сили $\vec{F}$ прикладеної до точки A , тобто $\vec{M} = \overline{AB} \times \vec{F}$.

1.4 Мішаний добуток

Мішаним (векторно-скалярним) добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається скалярний добуток векторного добутку перших двох на третій

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}.$$

Сформулюємо властивості мішаного добутку векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ та $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$:

$$1^0 \quad (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{c}\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a}), \quad (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c});$$

2⁰ мішаний добуток трьох векторів дорівнює, з точністю до знаку, об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, як на ребрах

(рис. 5), тобто $V = \pm (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = |(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|$;

$$3^0 \quad \text{вектори } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарні тоді і тільки тоді, коли } (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0;$$

$$4^0 \left(\vec{a} \vec{b} \vec{c} \right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

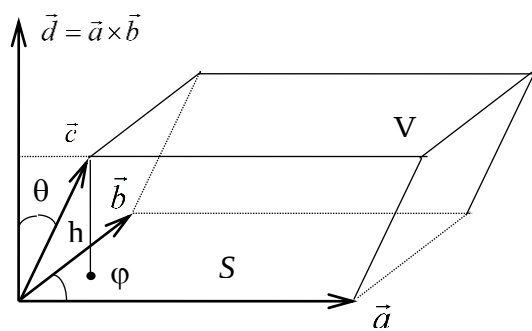


Рисунок 5