

§ 2. Аналітична геометрія

2.1 Лінії на площині, їхні рівняння

Лінією ℓ на координатній площині називатимемо множину усіх точок $M(x, y)$ цієї площини, координати кожної з яких задовольняють рівняння

$$F(x, y) = 0, \quad (1)$$

яке не перетворюється в тотожність.

Рівняння (1) називається рівнянням лінії.

2.2 Пряма на площині

В декартовій системі координат наведемо основні типи рівнянь прямої на площині.

1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b, \quad (2)$$

де k – кутовий коефіцієнт прямої, тобто тангенс того кута, який пряма утворює з додатним напрямом осі Ox , цей кут відраховується від осі Ox до прямої проти годинникової стрілки; b – величина відрізка, що відтинає пряма на осі ординат. При $b = 0$ рівняння (2) має вигляд $y = kx$, відповідна йому пряма проходить через початок координат.

2. Загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0, \quad (3)$$

де A, B, C одночасно не дорівнюють нулю.

Часткові випадки загального рівняння прямої:

а) якщо $C = 0$, то рівняння (3) матиме вигляд $Ax + By = 0$, $y = -\frac{A}{B}x$ – пряма, що проходить через початок координат;

б) якщо в загальному рівнянні (3) $B = 0$, то рівняння матиме вигляд: $Ax + C = 0$, або $x = -\frac{C}{A}$ – пряма паралельна осі Oy ;

в) якщо в загальному рівнянні (3) $A = 0$, то рівняння матиме вигляд: $By + C = 0$, або $y = -\frac{C}{B}$ – пряма паралельна осі Ox ;

г) при $C = 0$, $A = 0$ рівняння (3) має вигляд $By = 0$, або $y = 0$ – рівняння осі Ox . При $C = 0$, $B = 0$, отримуємо $x = 0$ – рівняння осі Oy .

3. Якщо вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярний до прямої, а точка $M_0(x_0, y_0)$ належить прямій, то рівняння прямої можна записати у вигляді

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (4)$$

Перпендикулярний до прямої вектор $\vec{n}$ надалі називатимемо *нормальним вектором прямої*, а рівняння (4) – *рівнянням прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має нормальний вектор $\vec{n} = (A, B)$* .

4. Якщо задано вектор $\vec{s} = (m, n)$, паралельний прямій, і точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій, то рівняння прямої можна записати у вигляді

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \quad (5)$$

Вектор $\vec{s}$ називається *напрямним вектором прямої*, а рівняння (5) – *канонічним рівнянням прямої*.

5. Якщо пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ то рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (6)$$

називається *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$.

6. Якщо праву частину рівняння (5) прирівняти до деякого дійсного параметра t , то отримуємо

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \quad (7)$$

параметричні рівняння прямої. Ці рівняння у векторній формі мають вигляд $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{s}t$, де $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ – радіус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$, що належить прямій, $\vec{s} = (m, n)$ – напрямний вектор прямої.

7. Рівняння прямої у відрізках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (8)$$

де a – величина відрізка, яку відтинає пряма на осі Ox ; b – величина відрізка, яку відтинає пряма на осі Oy . Кожен з відрізків відкладається від початку координат.

8. Якщо пряма має кутовий коефіцієнт k і проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, то її рівняння має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (9)$$

Якщо в цьому рівнянні параметру k надавати різні значення, то будемо одержувати різні прямі, які проходять через задану точку (x_0, y_0) . Тоді рівняння (9) дає *пучок (в'язку) прямих* з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$.

9. Рівняння

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0, \quad (10)$$

де $\cos \alpha$, $\cos \beta$ – напрямні косинуси нормального вектора $\vec{n}$, $p \geq 0$ – відстань від початку координат до прямої, називається *нормальним рівнянням*. Загальне рівняння (3) зводиться до нормального (10) множенням на нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, де знак перед коренем береться протилежним знаку вільного члена.

Якщо $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ нормальні вектори прямих ℓ_1 та ℓ_2 відповідно, то кут φ між ними визначається формулою

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Якщо k_1 , k_2 – кутові коефіцієнти двох прямих, то кут між ними визначається за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|, \quad k_1 k_2 \neq -1. \quad (11)$$

Запишемо умови паралельності та перпендикулярності прямих ℓ_1 та ℓ_2 . Отже,

$$\ell_1 \parallel \ell_2: \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \quad \ell_1 \perp \ell_2: A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0,$$

або

$$\ell_1 \parallel \ell_2: k_1 = k_2, \quad \ell_1 \perp \ell_2: k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Якщо задано рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0)$, то відстань від цієї точки до даної прямої обчислюємо за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (12)$$

2.3 Лінії другого порядку

Колом називається множина точок площини, рівновіддалених від заданої точки $C(x_0, y_0)$ на величину R .

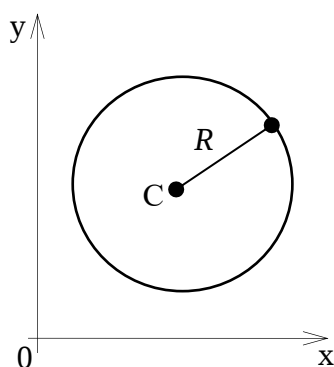


Рисунок 7

Точку $C(x_0, y_0)$ називають *центром кола*, а величину R його *радіусом*. Рівняння кола

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Еліпсом називають множину точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок площини є величиною сталою, що перевищує відстань між цими точками. Задані точки F_1 і F_2 називають фокусами еліпса, відстань $F_1 F_2$ – фокусною відстанню; сталу позначають $2a$.

Для фокусів $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ за умови $2c < 2a$ канонічне (найпростіше) рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Числа a і b називають відповідно *великою та малою півсями еліпса*, початок координат – його *центром*. Відношення $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ називають *ексцентриситетом еліпса*, прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – його *директрисами*.

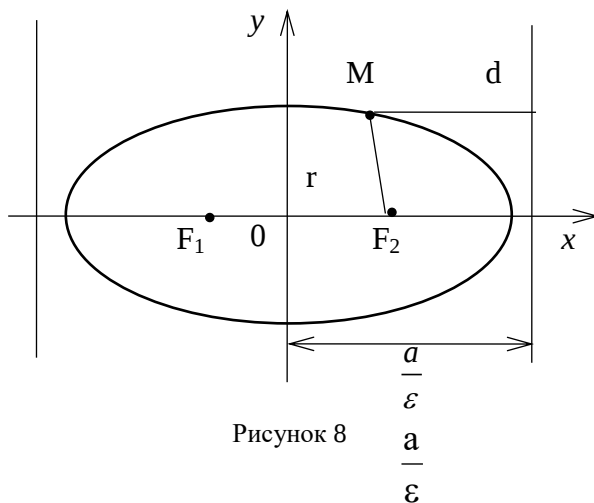


Рисунок 8

Еліпс із центром у точці $C(x_0, y_0)$ і півсями a і b ($a > b$), що паралельні осям координат, має рівняння

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Гіперболою називають множину точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох заданих точок є величиною сталою, що менша від відстані між цими точками. Дві задані точки F_1 і F_2 називають фокусами гіперболи, відстань F_1F_2 – фокусною відстанню; сталу позначають $2a$. Для фокусів $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ за умови $2c > 2a$ канонічне рівняння гіперболи має такий вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Числа a і b називають півсями гіперболи відповідно дійсною і уявною, початок координат – її центром. Відношення $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ називають ексцентриситетом гіперболи, прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ – її асимптотами, а прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – її директриси.

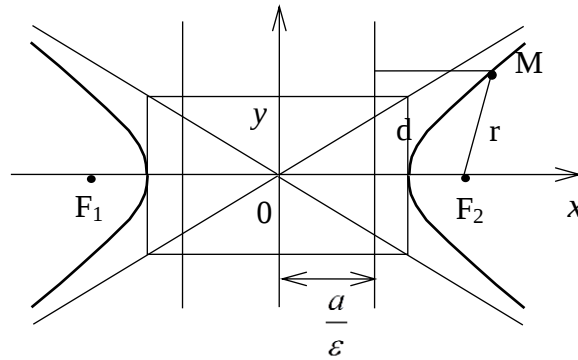


Рисунок 9

Канонічне рівняння гіперболи можна також зустріти у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Така гіпербола має центр в початку координат, асимптоти $y = \pm \frac{b}{a}x$, фокуси $F_1(0, -c)$ та $F_2(0, c)$, а вітки ідуть вгору та вниз.

Гіпербола із центром у точці $C(x_0, y_0)$ і півсями a і b ($a > b$), що паралельні осям координат, має рівняння

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Параболою називають множину точок площини, відстань від кожної з яких до заданої точки дорівнює відстані до заданої прямої, що не проходить через задану точку. Задану точку F називають фокусом параболи, задану пряму її директрисою. Відстань від фокуса до директриси називають *фокальним параметром параболи* і позначають p .

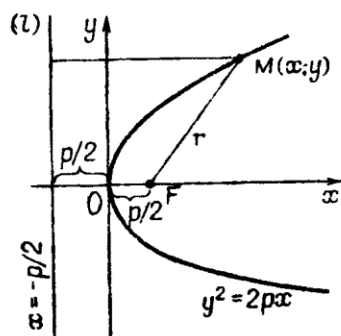


Рисунок 10

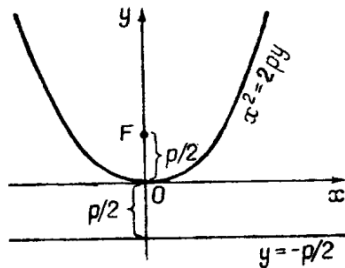


Рисунок 11

Для фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ і директриси $x = -\frac{p}{2}$ канонічне рівняння параболи має вигляд (рис. 10)

$$y^2 = 2px.$$

Парабола симетрична відносно осі Ox , точку її перетину з цією віссю називають вершиною. Отже, вершина розміщується на початку координат.

Якщо вершина параболи розміщується в початку координат і парабола симетрична відносно осі Oy , то канонічне рівняння параболи є таким $x^2 = 2py$ (рис. 11). У цьому випадку точка $F(0, p/2)$ є фокусом параболи, пряма $y = -p/2$ – її директрисою.

Якщо вершина параболи розміщується в точці $C(x_0, y_0)$ і її вісь симетрії паралельна осі Ox , то рівняння параболи матиме такий вигляд

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$