

Приклади розв'язання задач

16. Скласти рівняння множини точок, рівновіддалених від двох точок $A(-4; 3)$ і $B(1; -2)$.

► Віддаль між двома точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ визначається за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Нехай $M(x; y)$ довільна точка шуканої лінії. Оскільки точка $M(x; y)$ рівновіддалена від точок $A(-4; 3)$ і $B(1; -2)$, то відстань $\overline{AM} = \overline{MB}$. Використовуючи формулу відстані між двома точками, маємо

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}.$$

Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння. Після перетворень дістанемо $x - y + 2 = 0$ або $y = x + 2$. ◀

17. Скласти рівняння прямої, що проходить:

- 1) через точку $M(-1, 2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (3, -2)$;
- 2) через точку $M(2, -3)$ паралельно вектору $\vec{s} = (2, -1)$;
- 3) через точки $A(0, 1)$ та $B(3, -2)$, записати дане рівняння в параметричному вигляді;
- 4) через точку $M(-2, 1)$ та має кутовий коефіцієнт $k = -\frac{1}{2}$.

► Складаючи рівняння, прямої передусім виберемо вигляд рівняння, який приводить до мети.

1) Використаємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно заданому нормальному вектору $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Отримаємо $3(x + 1) - 2(y - 2) = 0$, або $3x - 2y - 1 = 0$. ◀

► 2) Використаємо канонічне рівняння $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$. Маємо $\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 3}{-1}$, $x - 2y + 4 = 0$. ◀

► 3) Запишемо рівняння даної прямої як рівняння прямої, що проходить через дві точки,

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Отримаємо $\frac{x - 0}{3 - 0} = \frac{y - 1}{-2 - 1}$, $-3x = 3y + 3$, $x + y + 1 = 0$ – загальне рівняння,

$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 1 - 3t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$ – параметричні рівняння прямої. ◀

► 4) Складемо рівняння прямої використовуючи формулу (9)

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 2), \text{ або } x + 2y = 0. \text{ ◀}$$

18. Задано координати вершин трикутника $A(-2, -3)$, $B(-1, 2)$, $C(5, 4)$. Скласти рівняння медіани AM та висоти BH .

► Медіана AM ділить сторону BC навпіл, тому координати точки M обчислюємо за формулами

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3.$$

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через точки A та M , отримуємо

$$\frac{x+2}{2+2} = \frac{y+3}{3+3}, \text{ звідки } 3x - 2y = 0 \text{ – рівняння медіани } AM.$$

Оскільки $BH \perp AC$, то можемо взяти $\vec{n} = \overrightarrow{AC} = (7; 7)$, тому рівняння висоти BH запишемо як рівняння прямої, що проходить через точку B і має нормальний вектор $\vec{n} = (7, 7)$. Одержимо $7(x+1) + 7(y-2) = 0$, або $x + y - 1 = 0$ – рівняння висоти BH . ◀

19. Задано пряму $\ell: 2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2, 1)$:

- 1) перпендикулярно даній прямій;
- 2) паралельно даній прямій;
- 3) під кутом 45° до даної прямої.

► 1) Запишемо рівняння прямої ℓ у вигляді $3y = -2x - 4$, або $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. Бачимо, що

для $\ell: k = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$. Нехай ℓ_1 – пряма перпендикулярна до ℓ , тоді $k_1 = -\frac{1}{k} = \frac{3}{2}$.

Запишемо рівняння прямої ℓ_1 як рівняння прямої, що проходить через точку $M(2, 1)$ і має кутовий коефіцієнт $k_1 = 3/2$,

$$\ell_1: y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2), \quad 2y - 2 = 3x - 6,$$

$$3x - 2y - 4 = 0. \blacktriangleleft$$

► 2) Оскільки пряма $\ell_2 \parallel \ell$, то $k_2 = k = -\frac{2}{3}$. Тому рівняння прямої ℓ_2 буде таким

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2), \quad 3y - 3 = -2x + 4,$$

$$2x + 3y - 7 = 0. \blacktriangleleft$$

► 3) Нехай ℓ_3 – пряма, проведена під кутом 45° до прямої ℓ . Із формули $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|$,

яка поєднує кутові коефіцієнти двох прямих отримуємо $\operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{k_3 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3} k_3} \right|$, звідки

$$1 - \frac{2}{3} k_3 = k_3 + \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{3} k_3 = \frac{1}{3}, \quad k_3 = \frac{1}{5},$$

або

$$1 - \frac{2}{3} k_3 = -k_3 - \frac{2}{3}, \quad k_3 = -5.$$

Отже, під кутом 45° до даної прямої можна провести дві прямі:

$$\ell_3: y - 1 = \frac{1}{5}(x - 2), \quad 5y - 5 = x - 2, \quad x - 5y + 3 = 0,$$

$$\text{або } \ell_3: y - 1 = -5(x - 2), \quad 5x + y - 11 = 0. \blacktriangleleft$$

20. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $x - 2y - 5 = 0$ та $x - 2y + 2 = 0$.

► Оскільки коефіцієнти нормальних векторів даних прямих рівні, то прямі паралельні. Довжину d сторони квадрата знайдемо як відстань від довільної точки однієї прямої до другої прямої. Знайдемо яку-небудь точку на першій прямій. Нехай наприклад $x = 1$, тоді $1 - 2y - 5 = 0$, звідки $y = 2$. Отже точка $M_0(1, 2)$ належить першій прямій. За формулою

$$(11) \text{ знайдемо відстань від точки } M_0 \text{ до другої прямої } d = \frac{|1 - 2 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Площа квадрата } S = d^2 = \frac{64}{5} \text{ (кв. од.)}. \blacktriangleleft$$

21. Пряма проходить через точки $A(-2; 3)$ і $B(4; -1)$. Знайти площу трикутника, який відсікає пряма від координатного кута.

► Рівняння прямої AB запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки,

$$\frac{x+2}{4+2} = \frac{y-3}{-1-3}, \quad \frac{x+2}{6} = \frac{y-3}{-4}, \quad \text{або} \quad 2x + 3y - 5 = 0.$$

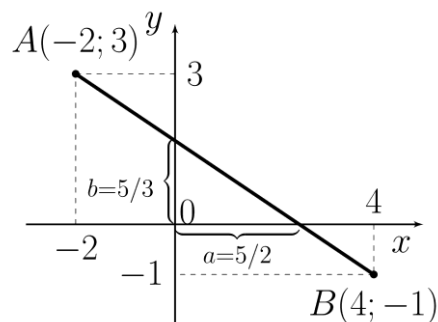


Рисунок 6

Рівняння прямої у відрізках на осях має вигляд

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

де a і b відрізки, які відтинає пряма на координатних осях.

Загальне рівняння прямої AB запишемо як рівняння прямої у відрізках на осях

$$\frac{x}{5/2} + \frac{y}{5/3} = 1. \text{ Отже, } a = \frac{5}{2}; b = \frac{5}{3}.$$

Площа прямокутного трикутника дорівнює $S = \frac{1}{2}|a| \cdot |b|$, тоді $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$

(кв.од.) ◀

22. Скласти рівняння кола, якщо:

- 1) його центр розміщується в точці $C(2, -3)$ і точка $A(-1, 1)$ лежить на колі;
- 2) його центр збігається з початком координат, а пряма $4x - 3y - 20 = 0$ є дотичною до кола.

► 1) Координатами центра кола є координати точки C , а радіусом кола – відстань між точками C і A

$$R^2 = (-1-2)^2 + (1+3)^2 = 25.$$

Отже, рівняння кола має вигляд $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$. ◀

► 2) Координатами центра кола є точка $(0, 0)$, а радіусом кола – відстань від цієї точки до заданої прямої

$$R = \frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 20|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{20}{5} = 4.$$

Отже, рівняння кола $x^2 + y^2 = 16$. ◀

23. Визначити півосі, фокуси, ексцентриситет і директриси еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

► З рівняння еліпса бачимо, що $a = 5$, $b = 4$. Тоді $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$; $\varepsilon = \frac{3}{4}$. Отже велика піввісь дорівнює 5, мала – 4; $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$. Директрисами еліпса є прямі $x = \pm \frac{20}{3}$. ◀

24. Показати, що рівняння $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ задає рівняння еліпса. Знайти центр, осі, фокуси та ексцентриситет цього еліпса.

► Виділимо повний квадрат у рівнянні

$$5(x^2 - 6x + 9) - 45 + 9(y^2 + 2y + 1) - 9 + 9 = 0,$$

$$5(x - 3)^2 + 9(y + 1)^2 - 45 = 0.$$

$$\text{Звідси } 5(x - 3)^2 + 9(y + 1)^2 = 45, \quad \frac{(x - 3)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{5} = 1.$$

Центром еліпса є точка $C(3, 1)$, велика піввісь $a = 3$, мала піввісь $b = \sqrt{5}$. Фокуси еліпса лежать на прямій $y = -1$ і віддалені від центра еліпса на відстань $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 5} = 2$.

Тому $F_1(1, 1)$, $F_2(5, -1)$. Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. ◀

25. Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо таке:

а) відстань між фокусами дорівнює 10, дійсна піввісь $a = 4$;

б) дійсна піввісь $a = 4$, ексцентриситет $\varepsilon = 1,25$;

в) відстань між фокусами дорівнює 6, ексцентриситет $\varepsilon = 1,5$;

г) відстань між фокусами, які лежать на осі абсцис, дорівнює 20, рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$;

д) гіпербола проходить через точку $M(9/2, -1)$ і відомі рівняння асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$.

► а) Оскільки $2c = 10$, то $c = 5$. Довжину уявної півосі обчислимо за формулою $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Отже, рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1. \quad \blacktriangleleft$$

► б) Оскільки ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то $c = 1,25a = 1,25 \cdot 4 = 5$. Знайдемо довжину уявної півосі за формулою $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Отже рівняння гіперболи є таким $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$. ◀

► в) Із умови задачі одержуємо, що $c = 3$. Оскільки $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то $a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{3}{1,5} = 2$. Тоді $b = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$. Таким чином, рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. ◀

► г) З рівнянь асимптот отримуємо, що $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, або $b = \frac{4}{3}a$. Оскільки $2c = 20$, то $c = 10$. Знайдемо дійсну піввісь із формули $a^2 = c^2 - b^2$, $a^2 = 100 - \frac{16}{9}a^2$, $\frac{25}{9}a^2 = 100$, $a = 6$, тоді $b = 8$. Тому рівняння гіперболи є таким $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$. ◀

► д) Тут маємо $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$, звідки $b = \frac{2}{3}a$. Тоді рівняння гіперболи буде $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(2a/3)^2} = 1$ або $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(2a/3)^2} = -1$. Координати точки $M(9/2, -1)$ повинні задовольняти рівнянню гіперболи, отже, $\frac{(9/2)^2}{a^2} - \frac{(-1)^2}{(2a/3)^2} = 1$, або $\frac{(9/2)^2}{a^2} - \frac{(-1)^2}{(2a/3)^2} = -1$. З першого рівняння знаходимо $a^2 = 18$, а з другого — $a^2 = -18$, що неможливо. Тому друге рівняння не підходить. Отже, $b^2 = \frac{4}{9}a^2 = 8$ і шукане рівняння гіперболи матиме вигляд $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$. ◀

26. Визначити півосі, координати фокусів, ексцентриситет, асимптоти і директриси гіперболи $4x^2 - 9y^2 = -36$.

► Зведемо рівняння $4x^2 - 9y^2 = -36$ гіперболи до канонічного вигляду. Поділивши його на 36, отримаємо $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1$. Дане рівняння визначає спряжену гіперболу з півсями $a = 3$, $b = 2$, в якій вітки йдуть вгору та вниз. Знайдемо координати фокусів: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, отже, $F_1(0, -\sqrt{13})$, $F_2(0, \sqrt{13})$. Ексцентриситет спряженої

гіперболи шукаємо за формулою $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Рівняння асимптот визначається формулою $y = \pm \frac{2}{3}x$, а рівняння директрис $y = \pm \frac{b}{\varepsilon} = \pm \frac{4}{\sqrt{13}}$. ◀

27. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо парабола симетрична:

а) відносно осі Ox і проходить через точку $M(3, -2)$;

б) відносно осі Oy і проходить через точку $M(2, -1)$;

в) відносно осі Ox і проходить через точку перетину двох прямих $y = x$ та $x + y = 2$.

► а) Канонічним рівнянням параболи, що симетрична відносно осі Ox , вершина якої знаходиться в початку координат, є $y^2 = 2px$. Залишається знайти значення параметра p . Так як парабола проходить через точку $M(3, -2)$, то координати цієї точки задовольняють записаному рівнянню, отже, $(-2)^2 = 3p$, $p = \frac{4}{3}$. Звідси $y^2 = \frac{8}{3}x$. ◀

► б) Канонічним рівнянням параболи, що симетрична відносно осі Oy , вершина якої знаходиться в початку координат, є $x^2 = -2py$. Підставимо координати точки $M(2, -1)$ у рівняння параболи: $4 = 2p$, $p = 2$. Тоді $x^2 = -4y$. ◀

► в) Знайдемо точку N перетину прямих $y = x$ та $x + y = 2$: $2x = 2$, $x = 1$, $y = 1$. Канонічним рівнянням параболи, що симетрична відносно осі Ox , вершина якої знаходиться в початку координат, є $y^2 = 2px$. Підставивши координати точки $N(1, 1)$, отримуємо $1 = 2p$, $p = 1/2$. Звідси $y^2 = x$. ◀