

2.4. Площина у просторі

Запишемо найпоширеніші рівняння площини у просторі .

1. Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежить на площині, а вектор $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ – вектор перпендикулярний до площини. Рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

називається *рівнянням площини, що проходить через задану точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$*

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ перпендикулярний до площини називається *нормальним вектором цієї площини*.

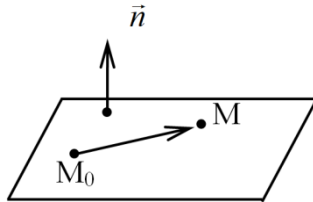


Рисунок 12

2. Рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і паралельна двом неколінеарним векторам $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Рівняння площини у відрізках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

5. Загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де коефіцієнти A, B, C, D – довільні числа, які одночасно не дорівнюють нулю.

1) Площина $Ax + By + Cz = 0$ проходить через початок координат.

2) Площини $By + Cz + D = 0$, $Ax + Cz + D = 0$, $Ax + By + D = 0$ відповідно паралельні координатним осям Ox , Oy , Oz .

3) Площина $Cz + D = 0$ або $z = -\frac{D}{C}$, $C \neq 0, D \neq 0$,

паралельна осям Ox та Oy , тобто площина паралельна площині Oxy . Аналогічно інші випадки.

Розглянемо дві площини p_1 та p_2 , задані загальними рівняннями відповідно

$$p_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1);$$

$$p_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

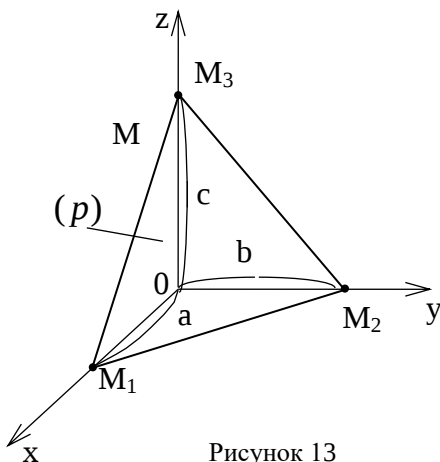


Рисунок 13

Якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то площини p_1 і p_2 збігаються.

Умова паралельності двох площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

Умова перпендикулярності двох площин

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Кут між площинами p_1 і p_2 визначається за формулою

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2.5. Пряма у просторі

1. Загальні рівняння прямої визначаються як перетин двох площин

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases}$$

за умови, що ці площини не паралельні і не збігаються, тобто їх нормальні вектори неколінеарні.

2. Канонічні рівняння прямої, що проходить через задану точку $M(x_0; y_0; z_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{s} = (m; n; p)$, мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

3. Параметричні рівняння
$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

де $M(x_0; y_0; z_0)$ – точка, що лежить на прямій, $\vec{s} = (m; n; p) \neq \vec{0}$ – напрямний вектор, t – змінний параметр.

4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та $M_2(x_2; y_2; z_2)$, мають вигляд
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Кут між двома прямими

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

визначається за формулою

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Умова паралельності
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Умова перпендикулярності
$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

Кут між прямою ℓ та площиною p є кут між прямою ℓ та її проекцією на площину p . Нехай пряму і площину задано рівняннями

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Тоді кут між ними обчислюється за формулою

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| |\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Якщо пряма ℓ паралельна площині p , то вектори $\vec{n}$ та $\vec{s}$ перпендикулярні, тобто $Am + Bn + Cp = 0$ – умова паралельності прямої і площини. Якщо пряма ℓ перпендикулярна до площини p , то вектори $\vec{n}$ та $\vec{s}$ паралельні, тому співвідношення $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ – умова перпендикулярності прямої і площини.

2.6 Поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору, декартові координати кожної з яких задовольняють рівняння другого степеня.

Сферою називається множина точок простору, рівновіддалених від заданої точки центра сфери. Якщо центром сфери є точка $O_1(a; b; c)$, а радіусом R , то рівняння сфери буде таким $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

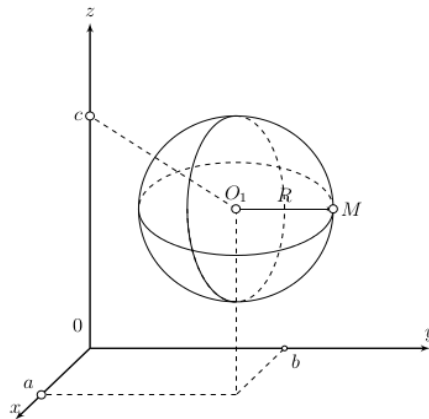


Рисунок 14

Якщо центр сфери знаходиться в точці $O(0;0;0)$ і радіус рівний R , то рівняння сфери має вигляд $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Поверхня називається *циліндричною*, якщо вона утворена прямою (твірною) паралельною до заданої прямої ℓ і проходить через задану лінію γ (напрямну лінію). Якщо твірна циліндричної поверхні паралельна осі Oz , а напрямна γ лежить в площині xOy і задана рівнянням $\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ то рівняння

циліндричної поверхні матиме вигляд $\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z \in (-\infty; +\infty). \end{cases}$

Рівняння $F(x, z) = 0$ визначає циліндричну поверхню з твірною, що паралельна осі Oy , рівняння $F(y, z) = 0$ – циліндричну поверхню з твірною, що паралельна осі Ox .

Розглянемо циліндри другого порядку :

а) *Еліптичним циліндром* називається поверхня (рис. 15), канонічне рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

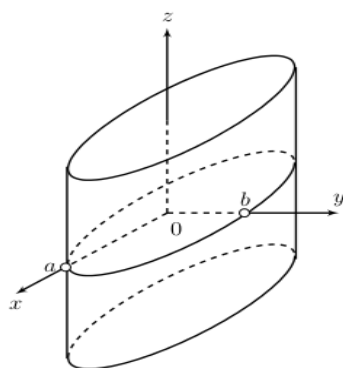


Рисунок 15

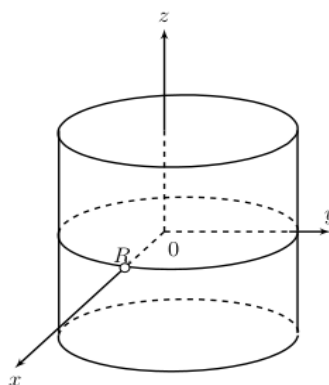


Рисунок 16

Якщо $a = b$ то маємо *круговий циліндр* $x^2 + y^2 = a^2$ (рис. 16).

б) *Гіперболічним циліндром* називається поверхня, рівняння якої має вигляд (рис. 17) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

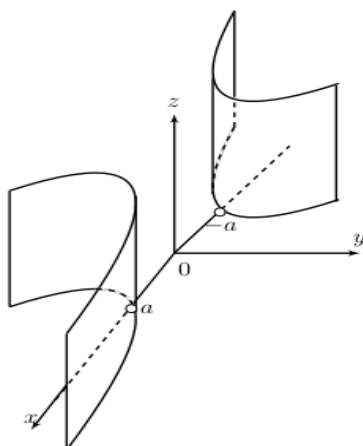


Рисунок 17

в) *Параболічним циліндром* називається поверхня, канонічне рівняння якої має вигляд (рис. 18)

$$y^2 = 2px.$$

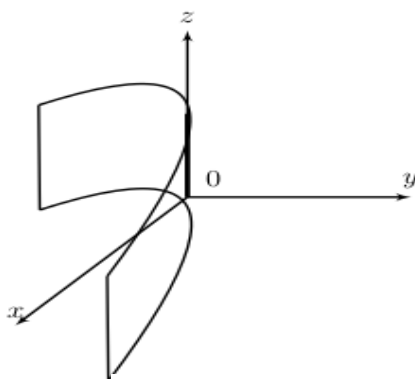


Рисунок 18

Еліпсоїдом називається поверхня, канонічне рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

де відрізки a, b, c – називають *півосями еліпсоїда* (рис. 19).

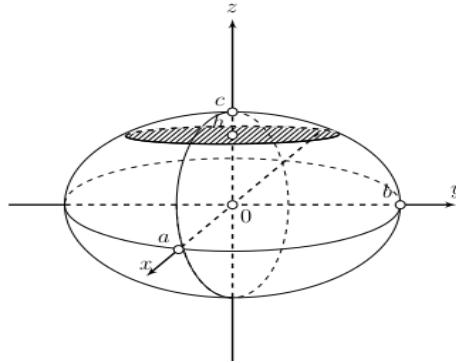


Рисунок 19

Однопорожнинним гіперболоїдом (рис. 20) називається поверхня, канонічне (найпростіше) рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

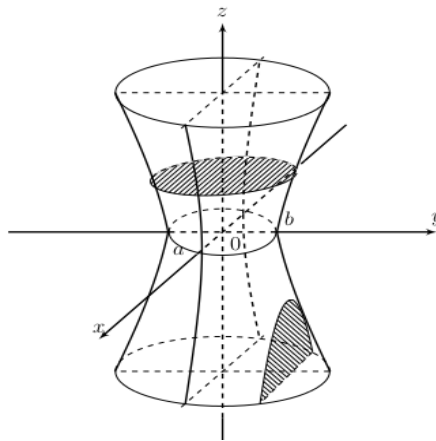


Рисунок 20

Двупорожнинним гіперболоїдом (рис. 21) називається поверхня, канонічне (найпростіше) рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

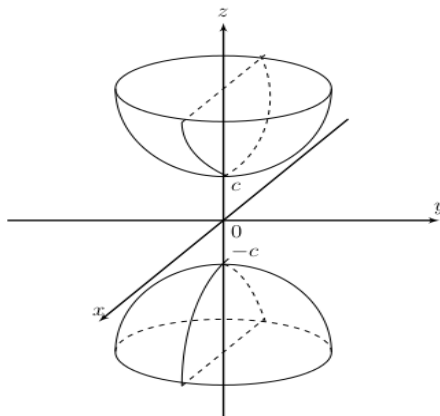


Рисунок 21

Еліптичним параболоїдом (рис. 22) називається поверхня канонічне (найпростіше) рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

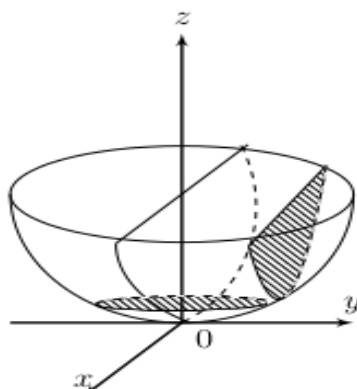


Рисунок 22

Гіперболічним параболоїдом (рис. 23) називається поверхня канонічне (найпростіше) рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

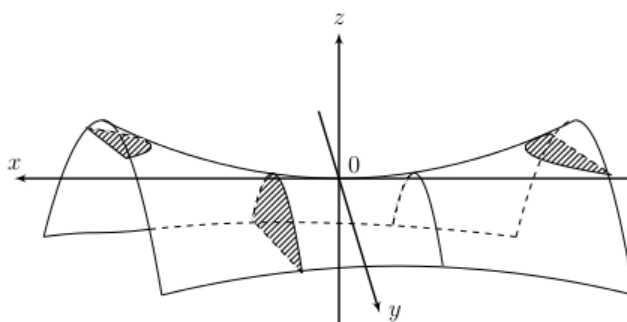


Рисунок 23

Конічною поверхнею (рис. 24) називається поверхня, яка описана прямою, що проходить через задану точку (вершину конуса), і перетинає задану лінію (напрямну конуса). Рівняння конуса другого порядку має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

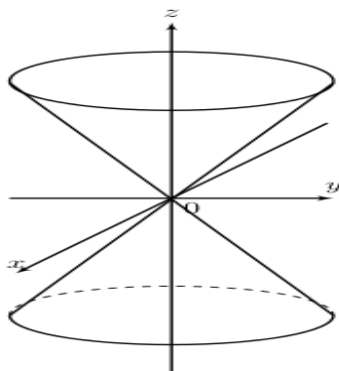


Рисунок 24