

§ 1. Дійсні числа та множини

1.1 Множини

Одним із фундаментальних понять математики є *множина*. Поняття множини не означається, його можна хіба що описати як сукупність об'єктів довільної природи, об'єднаних за якоюсь ознакою. Так, можна говорити про множину студентів факультету, множину шахових фігур, множину парних чисел і т.д. Об'єкти, що входять в дану множину, називаються *елементами* множини.

Множини позначаються великими латинськими буквами $A, B, X, Y, \dots$, а їх елементи — малими латинськими буквами $a, b, x, y, \dots$. Якщо елемент a входить у множину A , то цей факт позначають $a \in A$, запис $a \notin A$ (або $a \bar{\in} A$) означає, що a не є елементом A .

Для часто вживаних множин використовують стандартні позначення: $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел, $\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел, $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел тощо. Якщо множина не містить жодного елемента, то її називають *порожньою* множиною і позначають $\emptyset$.

Запис $A = \{a, b, c, \dots\}$ означає, що множина A складається з елементів $a, b, c, \dots$. Якщо при цьому серед елементів A є рівні між собою, то їх пишуть лише один раз:

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \\ \{1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5\} &= \{1, 2, 3, 4, 5\}.\end{aligned}$$

В теорії множин часто множину задають за допомогою *характеристичної властивості* $F(x)$ її елементів. При цьому характеристичною вважають властивість, яку задовольняють всі елементи даної множини і тільки вони; це записують:

$$A = \{x \mid F(x)\} \text{ або } \{x \in A \mid F(x)\}.$$

Риску перед $F(x)$ слід читати як „такий, що“ або „при яких“, „де“. Також замість риси можна писати двокрапку $A = \{x : F(x)\}$.

Нехай A, B — множини. Запис $A \subset B$ означає, що кожний елемент множини A є також елементом множини B , тоді кажуть, що множина A є *підмножиною* множини B . Вважається, що порожня множина $\emptyset$ є підмножиною будь-якої множини. Відзначимо також, що $A \subset A$.

З множинами можна проводити операції, властивості яких нагадують властивості арифметичних операцій з числами. Це і зумовило назви таких операцій. *Сумою (об'єднанням)* множин A і B (позначається $A \cup B$) є множина елементів, які належать хоча б одній з множин A або B . *Добутком (перерізом або перетином)* множин A і B (позначається $A \cap B$) є множина їх спільних елементів; якщо $A \cap B = \emptyset$, то кажуть, що A і B не перетинаються. І, нарешті, *різницею* множин A і B (позначається $A \setminus B$) є множина таких елементів A , які не входять в B . За аналогією з арифметичними операціями з числами операції об'єднання та перерізу множин мають властивості комутативності та асоціативності, переріз є дистрибутивним відносно об'єднання, тобто для будь-яких множин A, B, C є слушним співвідношення $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ і т.д. Однак операції з множинами мають ряд властивостей, непридатних

операціям з числами. Так, для будь-якої множини A виконуються рівності $A \cap A = A$ і $A \cup A = A$, а також справджується другий закон дистрибутивності $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ і т. д.

1.2 Логічні символи

У математичних твердженнях (означеннях, теоремах і т.п.) широко використовується економна символіка математичної логіки.

Спочатку введемо основні поняття математичної логіки. Одним з них є поняття *висловлювання*. Під висловлюванням розуміють твердження, сформульоване у вигляді речення, що задовольняє такі вимоги:

1. кожне висловлювання є істинним (слушним) або хибним;
2. жодне висловлювання не може бути одночасно істинним (слушним) і хибним.

Висловлювання позначаються великими рукописними буквами P, Q і т.п.

Приклад. «Число 7 не ділиться на 3 без остачі», « $8 > 5$ » — істинні висловлювання; «число 7 ділиться на 3 без остачі», « $8 \leq 5$ » — хибні висловлювання.

В математиці часто вживаються вирази: „для будь-якого елемента“ („яке б не було“, „всі“, „кожний“, „будь-який“) та „існує“ („знайдеться“, „деякий“, „хоча б один“). Для цих виразів прийняті особливі позначення: перший позначають символом $\forall$ (перевернута перша буква англійського слова „any“ — „будь-який“), другий — символом $\exists$ (повернута буква англійського слова „existence“ — „існування“). Символи $\forall$ і $\exists$ називаються *кванторами* відповідно *загальності* та *існування*. Записують за допомогою кванторів і читають так: $\forall x$ «яке б не було x », «для кожного x »; $\exists x$ — «існує таке x », «знайдеться таке x » і т. п.

Користуються також символами обмежених кванторів: $\forall x \in B$ — «для будь-якого x з множини B » (наприклад, $\forall \varepsilon > 0$ — «для будь-якого додатного числа ε »); $\exists x \in B$ — «існує такий елемент x з множини B » ($\exists \delta > 0$ — «знайдеться таке додатне число δ »).

У розмовній мові для сполучення двох тверджень використовують слова „або“, „і“, „не“, „якщо, то“, „тоді і тільки тоді, коли ...“. В логічній символіці цьому відповідають операції над висловлюваннями.

Так, *логічною сумою* (диз'юнкцією) двох висловлювань P і Q називають висловлювання « P або Q », яке хибне тоді і тільки тоді, коли P і Q одночасно хибні. Позначення диз'юнкції — $P \vee Q$:

Логічним добутком (кон'юнкцією) висловлювань P і Q називають висловлювання P і Q , яке істинне тоді і тільки тоді, коли P і Q одночасно істинні. Позначення кон'юнкції — $P \wedge Q$.

Запереченням висловлювання P називають висловлювання „не P “, яке істинне, коли P хибне, і хибне, коли P істинне. Позначення заперечення — $\bar{P}$.

Розглянемо побудову заперечення до даного висловлювання з використанням логічних символів. Нехай висловлювання $P(x)$ сформульоване для будь-якого елемента x з множини B , тобто

$$\forall x \in B : P(x) \text{ або } (\forall x \in B)(P(x)).$$

Заперечення цього висловлювання можна сформулювати двома способами: $\overline{\forall x \in B : P(x)}$ — „не має місця твердження про те, що $P(x)$ істинне для всіх x із B “; $\exists x \in B : \bar{P}(x)$ — „в множині B знайдеться хоча б один елемент x , для якого не виконується $P(x)$ “. Аналогічно висловлювання $\overline{\exists x \in B : Q(x)}$ можна записати як $\forall x \in B : \bar{Q}(x)$.

Як бачимо, при „переході“ знаку заперечення через квантори $\forall$ і $\exists$ останні змінюються відповідно на $\exists$ і $\forall$, заперечуються також і висловлювання.

Слідують (імплікацією) двох висловлювань P і Q називають висловлювання «якщо P , то Q », яке хибне тоді і тільки тоді, коли P істинне, а Q хибне. Позначення імплікації – PQ .

Якщо одночасно PQ та QP , то висловлювання P і Q називають *еквівалентними* і записують $P \Leftrightarrow Q$.
Тоді в будь-яких міркуваннях одне з цих висловлювань можна замінити іншим.

І, нарешті, зробимо декілька зауважень щодо побудови *теорем* та їх *класифікації*.

Теорема – це математичне твердження, істинність якого встановлюється шляхом доведення (шляхом міркувань). Формулювання будь-якої теореми складається з двох частин: *умови* $P(x)$ і *висновку* $Q(x)$. При цьому теорему можна записати так

$$\forall x: P(x)Q(x) \text{ (або } PQ)$$

Для того, щоб показати, що теорема $P(x)Q(x)$ хибна, досить знайти хоча б одне таке x , при якому $P(x)$ має місце, а $Q(x)$ – ні. Таке значення x називається *контрприкладом* для даної теореми.

В математиці розглядається чотири типи теорем: Прямая теорема – PQ . Обернена теорема – QP . Протилежна теорема – $\overline{PQ}$. Обернена протилежній (протилежна оберненій) теорема – $\overline{QP}$. Користуючись імплікацією, можна довести, що $(PQ) \Leftrightarrow (\overline{Q}\overline{P})$ і $(QP) \Leftrightarrow (\overline{P}\overline{Q})$.

В математиці зустрічаються теореми з трьома різними умовами: *необхідна, достатня, необхідна і достатня*.

Якщо імплікація PQ істинна, то Q називають *необхідною умовою* для P , а P – *достатньою умовою* для Q . При $P \Leftrightarrow Q$ говорять, що P є *необхідною і достатньою умовою* для Q .

1.3 Дійсні числа

Дійсним числом будемо називати будь-який десятковий дріб, скінченний або нескінченний. Зазначимо, що будь-який скінченний десятковий дріб можна вважати нескінченним періодичним, дописуючи, наприклад, як період число нуль. У такому розумінні кожне дійсне число є нескінченним десятковим дробом. При цьому періодичний десятковий дріб (в тому числі з періодом 0) називають *раціональним* числом, а неперіодичний десятковий дріб – *ірраціональним* числом.

Необхідність введення ірраціональних чисел продиктована хоча б практикою вимірювання довжин відрізків. Якби у нашому розпорядженні були лише раціональні числа, то ми не змогли б знайти довжину діагоналі квадрата, сторона якого дорівнює одиниці.

Будь-яке раціональне число можна записати у виді відношення $\frac{p}{q}$ двох цілих чисел p і q ; дріб $\frac{p}{q}$ нескоротний. Сума, добуток і частка двох раціональних чисел є раціональним числом.

Кожне дійсне число (нескінченний десятковий дріб) можна замінити близьким до нього так званим *раціональним наближенням*: скінченним десятковим дробом, в якому перші n цифр після коми збігаються з першими n цифрами дійсного числа, а всі інші цифри замінюються нулем. Похибка при такій заміні не перевищує $1/10^n$.

В інженерних розрахунках арифметичні дії над дійсними числами замінюють відповідними діями над раціональними наближеннями.

Зауважимо, що практично для одержання наближеного результату з обумовленою точністю достатньо при всіх обчисленнях брати на один знак більше, ніж потрібно, а потім заокруглювати одержаний результат до потрібного числа знаків. Наприклад, для обчислення суми $\pi + \sqrt{3}$ з точністю до 0,01 одержимо

$$\pi + \sqrt{3} \approx 3,142 + 1,732 = 4,874 \approx 4,87.$$

Кожне дійсне число зображається точкою координатної осі (числової прямої). Множину дійсних чисел позначають $\mathbb{R}$; через $\mathbb{R}_+$ позначають множину дійсних додатних чисел, а через $\mathbb{R}_-$ — множину дійсних від'ємних чисел. Вживають також позначення, про які йшлося вище: $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел, $\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел. Порожню множину (не тільки числову) позначають $\emptyset$.

Якщо X — підмножина дійсних чисел, то запис $x \in X$ означає, що число x належить X , а запис $x \notin X$ означає, що число x не належить X .

Перелічимо властивості множини всіх дійсних чисел (множини $\mathbb{R}$). Множина $\mathbb{R}$ *упорядкована*; це означає, що між будь-якими двома числами a і b має місце одне і тільки одне з трьох співвідношень: $a < b$, $a = b$, $a > b$. Множина $\mathbb{R}$ *щільна*: між будь-якими двома різними числами a і b міститься хоча б одне проміжне дійсне число c .

Множина дійсних чисел x , що задовольняють нерівність $a < x < b$, де a, b — фіксовані числа, називається *інтервалом* і позначається (a, b) . Множина дійсних чисел x , що задовольняють нерівність $a \leq x \leq b$, називається *відрізком (сегментом)* і позначається $[a, b]$. Множина дійсних чисел x , що задовольняють нерівності $a \leq x < b$ або $a < x \leq b$, називається *півінтервалом* і позначається відповідно $[a, b)$ або $(a, b]$. Інтервал, відрізок, півінтервал об'єднуються загальною назвою *проміжок* з позначенням $\langle a, b \rangle$. Інтервал (a, b) називають також відкритим проміжком, відрізок $[a, b]$ — замкненим проміжком; тоді кожний з проміжків $[a, b)$, $(a, b]$ є „напівзамкненим“ чи „напіввідкритим“.

Інтервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ називається ε -околом числа a . В розмовній мові для образності вживається також термін « ε -оکیل точки a ». Множину дійсних чисел $x > E$ називаємо E -околом невластивої точки $+\infty$, а множину дійсних чисел $x < -E$ ($E > 0$) — відповідно E -околом невластивої точки $-\infty$.

1.4 Абсолютна величина

Абсолютною величиною (модулем) числа x називається число (позначається $|x|$), що визначається умовами:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Властивості абсолютних величин:

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0$;
2. нерівність $|x| \leq \alpha$, $\alpha \geq 0$ означає, що $-\alpha \leq x \leq \alpha$;

3. нерівність $|x| \geq \alpha$, $\alpha > 0$ означає, що $x \leq -\alpha$ або $x \geq \alpha$;

4. $|x \pm y| \leq |x| + |y|$;

5. $|x \pm y| \geq |x| - |y|$;

6. $|xy| = |x| \cdot |y|$;

7. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$, ($y \neq 0$).

При цьому зазначимо, що $|x + y| = |x| + |y|$ тоді і тільки тоді, коли обидва доданки однакового знаку;
 $|x - y| = |x| - |y|$ тоді і тільки тоді, коли x та y мають однакові знаки і $|x| \geq |y|$.

§ 2. Функція однієї змінної

2.1 Поняття функції

Поняття функції, будучи одним з основних понять математики, формально не означається, хіба що описується як відображення, закон відповідності тощо.

Нехай X і Y — дві не порожні числові множини і задано закон f , який кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність один елемент $y \in Y$. Такий закон f називають *функцією* (або *відображенням* множини X в множину Y) і пишуть $f: X \rightarrow Y$, або $X \xrightarrow{f} Y$, або $y = f(x)$.

Множина X називається *областю визначення* (позначають $D(f)$), а множина Y — *множиною значень* функції (позначають $E(f)$). Змінну x називають *незалежною* (аргументом), а y — *залежною* змінною (значенням функції). Відзначимо також, що, як правило, під областю визначення функції f розуміють так звану природну область її існування, тобто сукупність *всіх* тих $x \in \mathbb{R}$, при яких операція f має зміст (значення функції існують і дійсні).

Наприклад, функція $y = 1/\sqrt{4-x^2}$ своєю областю визначення має множину $X = [-2, 2]$, а множина значень в цьому випадку $Y = [2, +\infty)$.

Для функції $y = \sqrt{-1 - \cos \pi x}$ маємо $X = \{1 + 2k \mid k \in \mathbb{N}\}$, а $Y = \{0\}$.

2.2 Способи задання функції

Основні способи задання функції: *аналітичний* (задано формулу, що зв'язує змінні x і y), *графічний*, *табличний*, *словесний*, *алгоритмічний* (так задають функцію для роботи з нею на ЕОМ).

Функція вважається заданою *аналітично*, якщо вона задається формулою. При цьому поняття формули може бути розширене в залежності від знання математичного апарату на даному етапі. Треба відзначити також, що будь-яка формула є символічним записом деякого описаного раніше співвідношення. А тому, зрештою, немає різниці між заданням функції за допомогою формули або за допомогою опису співвідношення; ці відмінності чисто зовнішні. Зауважимо, що аналітичний спосіб, у свою чергу, ділиться на *явне* та *неявне* задання функції. Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$ розв'язаним відносно залежної змінної y , то кажуть, що функція *задана у явній формі* або *що є явною*. Під *неявним* заданням функції

розуміють її задання у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$. Якщо це рівняння вдається розв'язати відносно залежної змінної y , то отримаємо явне задання функції. Однак, далеко не завжди це можна зробити (наприклад, $e^x - x + y^2 - \cos y = 0$).

Наведемо приклади функцій, що задаються словесно.

1. Функція „антьє x “ або „ціла частина x “ (від французького entier – цілий): найбільше ціле число, що не перевищує x , позначається $y = [x]$, або $y = E(x)$, $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{Z}$.

2. Функція Діріхле (Петер Густав Лежен Діріхле – німецький математик, 1805-1859)

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x - \text{іраціональне число,} \\ 1, & \text{якщо } x - \text{раціональне число,} \end{cases}$$

$$X = \mathbb{R}, \quad Y = \{0; 1\}.$$

3. Функція «sign x » (від латинського signum – знак) може задаватись описово як знак числа x або аналітично

$$\text{sign } x = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x - \text{від'ємне,} \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x - \text{додатне,} \end{cases} \quad X = \mathbb{R}, \quad Y = \{-1; 0; 1\}.$$

Треба мати на увазі, що кожна означена функція, якщо для неї введене спеціальне позначення, може бути використана для означення інших функцій за допомогою формул, що містять новий символ. І, нарешті, зазначимо, що функція може бути задана різними формулами на різних ділянках області свого визначення.

Функцію $f: X \rightarrow Y$ можна зобразити на площині xOy як множину всіх точок (x, y) , у яких перший елемент $x \in X$, а другий $y = f(x) \in Y$; таку множину точок $x \in X$ називають *графіком* (Γ_f) функції f :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Очевидно, що X і Y є проєкціями графіка функції $y = f(x)$ на координатні осі Ox та Oy відповідно. Зазначимо також, що прямі, проведені перпендикулярно до осі Ox в точках $x \in X$, перетинають графік функції Γ_f , причому лише в одній точці.

Графік дає корисну інформацію про поведінку функції і, якщо зобразити графік або його частину, то можна „побачити“ функцію. Але, зрештою, наскільки корисний графік при вивченні деяких конкретних функцій, настільки мало можна на нього покластися при вивченні довільних функцій. Розглянемо, наприклад, функцію Діріхле. Оскільки в кожному як завгодно малому проміжку лежать як раціональні, так і ірраціональні числа, то в кожному такому проміжку функція $y = \lambda(x)$ нескінченно „стрибає“ вверх і вниз між значеннями 0 і 1. Зрозуміло, що цього не можна зобразити жодним чином.

Поки що ми говорили про побудову графіка Γ_f якщо функцію задано. Але, іноді (наприклад, показання осцилографа, барографа, сейсмографа тощо) графік Γ_f задано і тим самим визначено функцію $f(x)$. В такому разі говорять про *графічне* задання функції. Оскільки вимірювання практично можна здійснити лише з певним ступенем точності, то значення функції, заданої графічно, як правило, наближені.

Табличний спосіб задання функції полягає в заданні таблиці окремих значень аргумента і відповідних їм значень функції.

При табличному заданні функції можна наближено обчислити значення функції і в тих точках, яких у таблиці немає. Для цього застосовується метод інтерполяції, який полягає в заміні функції між її сусідніми табличними значеннями деякою функцією простішої природи (наприклад, лінійною або квадратичною).

2.3 Складена функція

Нехай задано дві функції $x = \varphi(t)$, $y = f(x)$, такі, що $\varphi: T \rightarrow E(\varphi)$, $f: X \rightarrow E(f)$. Зрозуміло, що для кожного $t \in T$, такого, що $\varphi(t) \in X$, можемо поставити у відповідність значення $y = f[\varphi(t)]$.

Функція, визначена співвідношенням $F(t) = f[\varphi(t)]$, називається *складеною* функцією або суперпозицією (композицією) (від латинського composition – складання) функцій f і φ . При цьому змінні t , x , y називають відповідно внутрішньою, проміжною і зовнішньою змінними. Очевидно перетин множин $E(\varphi)$ значень функції φ і області визначення $D(f)$ функції f не має бути порожньою множиною $E(\varphi) \cap D(f) \neq \emptyset$.

Приклади:

1. Суперпозицією функцій $y = \cos x$ і $x = \sqrt[5]{t}$ є функція $y = \cos \sqrt[5]{t}$.
2. Функція $y = \lg tg x$ є суперпозицією функцій $y = \lg u$, $u = tg x$.

2.4 Параметрично задані функції

Нехай задано дві функції

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (1)$$

однієї незалежної змінної t , визначені на одному й тому самому проміжку. Якщо функція $x = \varphi(t)$ строго монотонна, то, відповідно до попереднього пункту, вона має обернену функцію $t = \Phi(x)$. Тому змінну y можна розглядати як складену функцію від x : $y = \psi(\Phi(x))$.

Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій (1) називають *параметричним заданням функцій*. Допоміжна змінна t при цьому називається параметром. Всяка параметрично задана функція (1) визначає на площині Oxy деяку криву, проте не всяка параметрично задана крива визначає функцію.

Приклади.

1. Рівняння $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $t \in [0; \pi]$ визначають функцію, оскільки функція $x = R \cos t$, $t \in [0; \pi]$ строго монотонна. Задана функція визначає півколо $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, розміщене у верхній півплощині.

2. Рівняння $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$, задають параметричні рівняння еліпса з центром у початку координат та осями a та b .

2.5 Деякі класи функцій

В математичному аналізі розглядаються не окремі функції, а функції у загальному розумінні. Вони класифікуються за такими ознаками як парність, непарність, періодичність, монотонність тощо. Ці питання відомі зі шкільного курсу математики. А тому зупинимось тут лише на деяких уточненнях і зауваженнях, потрібних для подальших викладок.

Функція f , що визначена на проміжку f , симетричному відносно початку координат $x=0$, називається *парною (непарною)*, якщо $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$). Зазначимо, що в обох випадках такі функції не змінюють свої абсолютної величини при зміні знаку аргументу.

Якщо Γ_f – графік парної функції, то точки $M_1(x, f(x))$ і $M_2(x, f(x))$, $x \in X$, що симетричні відносно осі Oy , лежать на цьому графіку. Отже, графік парної функції симетричний відносно осі ординат. Аналогічно, графік непарної функції симетричний відносно початку координат. Варто зазначити, що симетрії відносно початку координат можна досягти „двома кроками”: спочатку симетрією відносно однієї координатної осі, а потім – відносно другої координатної осі

Поділ функцій на парні і непарні не є повним: існують функції, які є ні парними, ні непарними.

Функція f називається *періодичною*, якщо існує таке додатне число T (його називають *періодом* функції), що при всіх x в області визначення функції виконується рівність $f(x+T) = f(x)$. Основним періодом функції називається найменший з періодів. Неважко переконатись, що сумою (добутком, часткою) двох періодичних функцій з однаковими періодами є також періодична функція з тим же періодом. Якщо ж періоди різні ($T_1 \neq T_2$), то періодом, наприклад, їх суми є число $T = mT_1 = nT_2$ ($m, n \in \mathbb{N}$), отже, для того, щоб спільний період існував, має виконуватися умова $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$.

Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою (спадною)* на деякому проміжку $\langle a, b \rangle$, коли із $x_2 > x_1$ ($\forall x_2, x_1 \in \langle a, b \rangle$) випливає, що $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$). Аналогічно вводяться поняття *неспадної* на проміжку $\langle a, b \rangle$ функції ($f(x_2) \geq f(x_1)$ при $x_2 > x_1$, де $x_2, x_1 \in \langle a, b \rangle$) та *незростаючої* на $\langle a, b \rangle$ функції ($f(x_2) \leq f(x_1)$ при $x_2 > x_1$, де $x_2, x_1 \in \langle a, b \rangle$).

Зростаючі, неспадні, спадні і незростаючі функції називаються монотонними, а зростаючі і спадні – строго монотонними. Якщо ж область визначення X функції $y = f(x)$ можна розбити на скінченне число проміжків, на кожному з яких функція монотонна, то таку функцію називають кусково-монотонною.

Функція f називається *обмеженою зверху (знизу)* на множині X , якщо існує число M (m), таке, що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$).

Функція f , яка обмежена на множині X зверху і знизу, називається *обмеженою*. Це означення можна перефразувати ще й так: існує число $C > 0$, таке, що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $|f(x)| \leq C$. Як бачимо, означення обмеженої функції $f: X \rightarrow Y$ і означення обмеженості множини Y значень змінної y еквівалентні.

Особливістю графіка обмеженої на X функції f є існування горизонтальної смуги між прямими $y = m$ і $y = M$ (чи між $y = -C$, $y = C$, $C > 0$), в якій повністю знаходиться графік Γ_f .

2.6 Обернена функція

Нехай функція $f: X \rightarrow Y$ така, що кожного свого значення $f(x)$ вона набуває лише один раз. Іншими словами, різним $x_1, x_2 \in X$ відповідають різні $y_1, y_2 \in Y$ (такі відображення називають ще взаємно однозначними, а саму функцію — оборотною).

Якщо функція $y = f(x)$ оборотна, то рівняння $f(x) = y$ при кожному $y = y_1 \in Y$ має єдиний розв'язок $x_1 \in X$ ($f(x_1) = y_1$). Отже, за допомогою рівняння $f(x) = y$ здійснюється відображення $\varphi = f^{-1}$ множини Y в множину X . Функцію $x = f^{-1}(y)$ називають *оберненою функцією* до функції $y = f(x)$, яку в такому випадку прийнято називати *прямою* функцією (не плутати з лінійною функцією, графік якої є прямою лінією). Щоб не плутати f^{-1} з $\frac{1}{f}$, звичайно для обернених функцій вживають спеціальні позначення ($\lg$, $\arcsin$, $\sqrt{}$ та ін.).

З означення оберненої функції випливає, що областю визначення f^{-1} є множина значень f , а множиною значень f^{-1} — область визначення f .

Достатньою умовою існування оберненої функції є монотонність функції $y = f(x)$. При цьому якщо функція зростає (спадає), то і обернена функція зростає (спадає).

Відзначимо також, що суперпозиція двох взаємно обернених функцій є тотожним перетворенням, а саме

$$f[f^{-1}(y)] \equiv y \in Y, \quad f^{-1}[f(x)] \equiv x \in X.$$

Графік оберненої функції $x = \varphi(y)$ збігається з графіком функції $y = f(x)$ якщо значення змінної y , яка стала тепер аргументом, відкладати на осі Oy . Якщо ж незалежну змінну відкладати на осі Ox , тобто якщо записати обернену функцію у вигляді $y = \varphi(x)$, то графік оберненої функції буде симетричним до графіка функції $y = f(x)$ відносно бісектриси першого і третього координатних кутів (рис. 1).

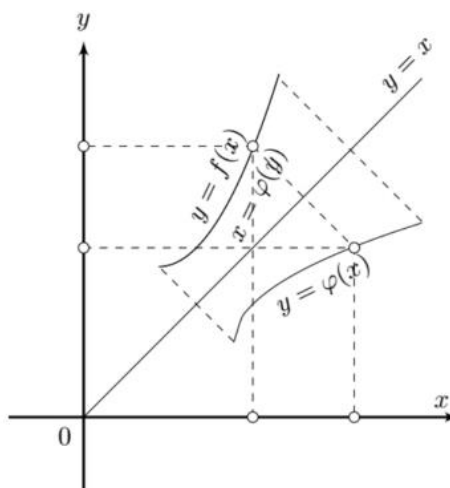


Рисунок 1: обернена функція

Цю властивість можна використати для побудови графіка оберненої функції, якщо відомо графік прямої функції.

2.7 Елементарні функції

Основними елементарними функціями є:

- степенева $f(x) = ax^a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$;
- показникова $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- тригонометрична $f(x) = \sin x$.

Зазначимо, що ми обмежились лише позначеннями основних елементарних функцій, бо їх властивості і графіки вивчають у шкільному курсі математики.

Елементарними функціями називаються функції, які можна задати одним аналітичним виразом, складеним з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і скінченного числа утворень складених функцій. Також, якщо існує обернена функція до елементарної, то вона є елементарною.

Як бачимо, клас елементарних є доволі широким. Наприклад, $y = \cos x$ — елементарна, бо вона є суперпозицією функцій $y = \sin u$ і $u = x + \pi/2$; $y = \operatorname{tg} x$ є елементарною як частка від ділення функцій $y = \sin x$ на функцію $y = \cos x$. Також елементарною буде логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ як обернена до показникової.

2.8 Елементарні перетворення графіків функцій

При побудові графіків функцій застосовують наступні прийоми: побудова „за точками“, за властивостями функції (парність, непарність, періодичність, зростання, спадання тощо), дії з графіками (додавання, віднімання, множення графіків).

Поки що, у зв'язку з обмеженістю математичних засобів (в першу чергу, з відсутністю апарату диференційного числення), будемо використовувати геометричні перетворення відомих графіків: паралельне перенесення, розтяг, стиск, поворот. Так, знаючи графік функції $y = f(x)$, можна побудувати графіки функцій: $y = f(-x)$ — будуємо графік, симетричний даному відносно осі Oy ; $y = -f(x)$ — будуємо графік, симетричний даному відносно осі Ox ; $y = f(x) - a$ — початковий графік паралельно зсуваємо вздовж осі Ox на $|a|$ одиниць масштабу в напрямі знаку a ; $y = f(x) + B$ — зсуваємо графік функції $y = f(x)$ вздовж осі Oy на $|B|$ одиниць в напрямі знаку B ; [Г] $y = Af(x)$ ($A > 0$) — початковий графік функції $y = f(x)$ „розтягуємо“ від осі Ox в A разів при $A > 1$ і „стискаємо“ до осі Ox в $\frac{1}{A}$ разів при $A < 1$; $y = f(kx)$ ($k > 0$) — заданий графік „стискаємо“ до осі Oy в k разів при $k > 1$ і „розтягуємо“ від осі Oy в $\frac{1}{k}$ разів при $k < 1$. Останні перетворення можна об'єднати у виді постановки такої задачі: за даним графіком функції $y = f(x)$ побудувати графік функції $y = Af(kx + b) + B$. Вираз доцільно переписати так

$$Af(kx + b) + B = Af\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right) + B.$$

Зрозуміло, що при цих перетвореннях треба враховувати знаки параметрів A та k .

Відзначимо також, що графік функції $y = f(|x|)$ одержується з графіка $y = f(x)$ так: для $x \geq 0$ зберігається графік функції $y = f(x)$, а потім будуємо графік, симетричний відносно осі Oy до збереженої частини (корисно пам'ятати, що функція $y = f(|x|)$ — парна).

Графік функції $y = |f(x)|$ розташований не нижче осі Ox . Він одержується з графіка $y = f(x)$ так: та частина, що не лежить нижче осі Ox , залишається без змін, а та, що лежить під віссю Ox , симетрично відображається відносно осі Ox .