

Приклади розв'язання задач

1. Нехай $A = \{3; 5; 6; 8; 9; 10\}$, $B = \{1; 2; 4; 8; 10\}$. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

► Використовуючи означення теоретико-множинних операцій, маємо

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10\}, A \cap B = \{8; 10\}, A \setminus B = \{3; 5; 6; 9\},$$

$$B \setminus A = \{1; 2; 4\}. \blacktriangleleft$$

2. Визначити істинність висловлювання:

а) число 42 ділиться на 7;

б) Харків – столиця України;

в) $\exists x \in \mathbb{R} :: x + 3 > 8$;

г) Кубань впадає у Чорне море.

► а) Висловлювання істинне, бо $42 : 7 = 6$. $\blacktriangleleft$

► б) Висловлювання хибне, бо насправді Київ – столиця України. $\blacktriangleleft$

► в) Висловлювання істинне, бо $x + 3 > 8$ маємо, що $x > 5$. Отже, усі $x > 5$ задовольняють відповідну нерівність. $\blacktriangleleft$

► г) Висловлювання істинне, позаяк річка Кубань справді впадає у Чорне море. $\blacktriangleleft$

3. Довести ірраціональність чисел:

а) $0,2020020002\dots \underbrace{2000\dots 0}_n 2\dots$;

б) $\alpha - \beta$, де α – раціональне число, β – ірраціональне;

в) $\sqrt{3}$;

г) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

► а) По суті, треба встановити, що заданий десятковий дріб неперіодичний. Справді, між n -ою двійкою і $(n+1)$ -ою двійкою знаходиться n нулів, чого не може бути в періодичному дробі. $\blacktriangleleft$

► б) Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що $\alpha - \beta = \gamma$ є раціональним числом. Тоді $\beta = \alpha - \gamma$ також є раціональним числом як різниця двох раціональних чисел, що суперечить умові. А тому наше припущення неправильне і число $\alpha - \beta$ – ірраціональне. $\blacktriangleleft$

► в) Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує нескоротний дріб $\frac{p}{q}$, квадрат якого дорівнює 3. Тоді $p^2 = 3q^2$, тобто p^2 – кратне трьом. А тоді і p – кратне 3. Справді, якби p було не кратним 3, то $p = 3m + 1$ або $p = 3m + 2$. Звідси, для $p = 3m + 1$ (подібні міркування застосовні й для $p = 3m + 2$) маємо

$p^2 = (9m^2 + 6m) + 1$ – не кратне 3, бо $(9m^2 + 6m)$ кратне 3, але 1 не кратне 3. Таке не може бути, бо $p^2 = 3q^2$. Але, якщо p – кратне 3, то $p = 3m$ і з рівності $p^2 = 3q^2$ випливає $9m^2 = 3q^2$, тобто $q^2 = 3m^2$. А отже, і число q – кратне 3. Таким чином, дріб $\frac{p}{q}$ – скоротний. Одержане протиріччя показує, що наше припущення про існування раціонального числа (нескоротного дробу), квадрат якого дорівнює трьом, є хибним. ◀

► г) Знову застосуємо доведення від супротивного. Припустимо, що число $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ раціональне. Тоді число $\sqrt{5} - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ також раціональне (як відношення двох раціональних чисел). Тоді і число $\sqrt{3} = \frac{1}{2}((\sqrt{3} + \sqrt{5}) - (\sqrt{5} - \sqrt{3}))$ є раціональним, що суперечить доведеному в попередньому прикладі.

Можна показати, що ірраціональним є також відношення довжини кола до довжини його діаметра, тобто число $\pi = 3,1425926\dots$. ◀

4. Розв'язати нерівності:

а) $|3x - 1| < 1$;

б) $(x - 3)^2 \geq 9$;

в) $|x^2 - 5x + 6| > x^2 - 5x + 6$.

► а) Враховуючи властивість абсолютної величини, дану нерівність перепишемо у вигляді $-1 < 3x - 1 < 1$, звідки $0 < 3x < 2$ і $0 < x < 2/3$ або $x \in (0; 2/3)$. ◀

► б) Задана нерівність рівносильна нерівності $|x - 3| \geq 3$, звідки

$$\begin{cases} x - 3 \geq 3, \\ x - 3 \leq -3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6, \\ x \leq 0, \end{cases}$$

тобто $x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$. ◀

► в) Задана нерівність виконується при тих значеннях x , для яких $x^2 - 5x + 6 < 0$, звідки $2 < x < 3$. ◀

5. Чи мають розв'язки рівняння:

а) $|x| = x + 7$; б) $|x| = x - 7$.

► а) При $x \geq 0$ приходимо до рівняння $x = x + 7$, яке розв'язку не має. При $x < 0$ маємо $-x = x + 7$, звідки $x = -\frac{7}{2}$. Це значення задовольняє задане рівняння. ◀

► б) При $x \geq 0$ приходимо до рівняння $x = x - 7$, яке розв'язку не має. При $x < 0$ маємо $-x = x - 7$, звідки $x = \frac{7}{2}$, що суперечить умові $x < 0$. Таким чином, дане рівняння розв'язків не має. ◀

6. Знайти корені рівняння

а) $|\sin 2x| = \sin 2x + 1$; б) $x^2 - 3|x| - 4 = 0$.

► а) Це рівняння можуть задовольняти тільки ті значення x , при яких $\sin 2x < 0$, тому перепишемо його так

$$-\sin 2x = \sin 2x + 1 \quad \text{або} \quad \sin 2x = -\frac{1}{2},$$

Звідки $2x = \pi k - (-1)^k \pi / 6$, або

$$x = \frac{\pi}{2} k - (-1)^k \pi / 12 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad \blacktriangleleft$$

► б) Можна розв'язати це рівняння стандартним способом, розглядаючи випадки $x \geq 0$ і $x < 0$, але є простіший спосіб. Запишемо рівняння у вигляді $|x|^2 - 3|x| - 4 = 0$, звідки, позначивши $|x| = y \geq 0$, одержуємо $y_1 = 4$, $y_2 = -1$. Оскільки $y_2 < 0$ не підходить, то залишиться $|x| = 4$, тобто $x_1 = -4$, $x_2 = 4$. ◀

7. Дослідити на обмеженість:

а) множину натуральних чисел;

б) множину чисел виду $\left\{ \frac{n^2}{2n^2 + 7} \right\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

► а) Множина натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ обмежена знизу числом 1 і не обмежена зверху. Найменшим елементом цієї множини є число 1. ◀

► б) Оскільки при будь-якому натуральному n виконуються нерівності $0 < \frac{n^2}{2n^2 + 7} < \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$,

то множина чисел $\left\{ \frac{n^2}{2n^2 + 7} \right\}$ обмежена зверху числом $\frac{1}{2}$, а знизу – нулем. ◀

8. Задано функцію $f(x) = \frac{3x+1}{3x-1}$. Знайти:

а) $f(3x)$; б) $3f(x)$; в) $f(x^3)$; г) $[f(x)]^3$.

► Легко переконуємось, що:

а) $f(3x) = \frac{9x+1}{9x-1}$; б) $3f(x) = 3 \frac{3x+1}{3x-1}$;

$$\text{в) } f(x^3) = \frac{3x^3 + 1}{3x^3 - 1}; \quad \text{г) } [f(x)]^3 = \left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^3. \blacktriangleleft$$

9. Задано функцію $f(x) = x^2$. Знайти $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

► Знаходимо значення даної функції при $x = a$ і $x = b$: $f(a) = a^2$, $f(b) = b^2$. Тоді одержимо

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a. \blacktriangleleft$$

10. Задано функцію $f(x) = \begin{cases} 5^x - 4 & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ 2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \text{при } 0 \leq x < \pi, \\ \frac{2-x}{x^2-3} & \text{при } \pi \leq x \leq 6. \end{cases}$

Знайти $f(-1)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $f(4)$, $f(6)$.

► Точка $x = -1$ знаходиться в проміжку $[-1; 0)$, тому $f(-1) = 5^{(-1)} - 4 = \frac{1}{5} - 4 = -\frac{19}{4}$.

Точки $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2\pi}{3}$ лежать в проміжку $[0; \pi)$, тому $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 2 - 1 = 1$,

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = 2 - \sqrt{3}.$$

Точки $x = 4$, $x = 6$ лежать в проміжку $[\pi; 6]$, тому $f(4) = \frac{2-4}{4^2-3} = -\frac{2}{13}$,

$$f(6) = \frac{6-4}{6^2-3} = \frac{2}{33}. \blacktriangleleft$$

11. Знайти $\varphi[\psi(x)]$ і $\psi[\varphi(x)]$, якщо $\varphi(x) = x^3$ і $\psi(x) = 5^x$.

► $\varphi[\psi(x)] = [\psi(x)]^3 = (5^x)^3 = 5^{3x}$; $\psi[\varphi(x)] = 5^{\varphi(x)} = 5^{x^3}. \blacktriangleleft$

12. Складені функції записати у виді суперпозицій основних елементарних функцій:

а) $y = \arccos(\cos^2 x)$; б) $y = \operatorname{tg}^5(\ln \sin x)$.

► а) Задану функцію запишемо у вигляді $y = \arccos v$, де $v = u^2$, $u = \cos x$. Тут y – зовнішня змінна, x – внутрішня змінна, u і v – проміжні змінні. $\blacktriangleleft$

► б) Суперпозиції основних елементарних функцій, починаючи із зовнішньої змінної y і закінчуючи внутрішньою змінною x , можна записати у вигляді ланцюжка $y = u^5$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = \ln z$, $z = \sin x$. $\blacktriangleleft$

13. Знайти області визначення функцій:

а) $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$; б) $f(x) = \lg(x^2 - 16)$;

в) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{3+x}$; г) $f(x) = \arccos \frac{3}{4+2\cos x}$;

д) $f(x) = \log_2 \log_3 \log_4 x$.

► а) Область визначення знаходимо як сукупність значень x , при яких одночасно виконуються нерівності $x-3 \geq 0$ і $5-x \geq 0$, звідки $D(f) = [3; 5]$. ◀

► б) Вираз $\lg(x^2 - 16)$ має зміст при $x^2 - 16 > 0$, тобто при $x^2 > 16 \Leftrightarrow |x| > 4$. Звідси, областю визначення є об'єднання $(-\infty, -4) \cup (4; +\infty)$. ◀

► в) Функція визначена при тих x , для яких $x \neq -3$ і $\left| \frac{2x}{3+x} \right| \leq 1$, отже, мають одночасно виконуватись нерівності $\frac{2x}{3+x} \leq 1$ і $\frac{2x}{3+x} \geq -1$.

Розв'язуємо кожну з цих нерівностей

$$\left(\frac{2x}{3+x} \leq 1 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{3+x} - 1 \leq 0 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{3+x} \leq 0 \right) \Leftrightarrow x \in (-3; 3];$$

$$\left(\frac{2x}{3+x} \geq -1 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{3+x} + 1 \geq 0 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{3x+3}{3+x} \geq 0 \right) \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup [-1; \infty).$$

Областю визначення функції є перетин цих множин, тобто $D(f) = [-1; 3]$. ◀

► г) Функція визначена при тих x , для яких $-1 \leq \frac{3}{4+2\cos x} \leq 1$.

Оскільки $|\sin x| \leq 1$, то при будь-яких x вираз $4+2\cos x > 0$. Тому достатньо розв'язати нерівність $\frac{3}{4+2\cos x} \leq 1$, звідки

$$(3 \leq 4+2\cos x) \Leftrightarrow \left(\cos x \geq -\frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right).$$

Отже, $D(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right]$. ◀

► д) Функція $\log_2 \log_3 \log_4 x$ визначена при $\log_3 \log_4 x > 0$, а тому $(\log_4 x > 1) \Leftrightarrow (x > 4)$.

Таким чином, $D(f) = (4; +\infty)$. ◀

14. Функція $f(x)$ визначена на відрізку $[0; 1]$. Знайти області визначення функцій:

а) $f(5x^4)$; б) $f(\operatorname{ctg} x)$.

► а) Введемо проміжний аргумент $u = 5x^4$. Тоді функція $f(5x^4) = f(u)$ визначена,

якщо $0 \leq u \leq 1$, тобто $0 \leq 5x^4 \leq 1$, звідки $-\frac{1}{\sqrt[4]{5}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$. ◀

► б) Оскільки $0 \leq \operatorname{ctg} x \leq 1$, то $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \pi + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ◀

15. Дослідити на парність і непарність функції:

а) $f(x) = \lg(x^3 + \sqrt{1+x^6})$; б) $f(x) = x \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$;

в) $f(x) = x^6 \sqrt[5]{x} + 2 \sin x$; г) $f(x) = x^8 + 3x^3$.

► а) Знаходимо $f(x) + f(-x) = \lg(x^3 + \sqrt{1+x^6}) +$

$+\lg(-x^3 + \sqrt{1+x^6}) = \lg(-x^6 + 1 + x^6) = \lg 1 = 0$, тобто $f(x)$.

Отже, задана функція непарна. ◀

► б) $f(-x) = -x \frac{a^{-x} + 1}{a^{-x} - 1} = -x \frac{1 + a^x}{1 - a^x} = x \frac{a^x + 1}{a^x - 1} = f(x)$.

Отже, функція $f(x)$ парна. ◀

► в) $f(-x) = x^6 \sqrt[5]{-x} - 2 \sin x = -(x^6 \sqrt[5]{x} + 2 \sin x) = -f(x)$, тобто функція непарна. ◀

► г) $f(-x) = x^8 - 3x^3$, тобто $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$. Тому функція $f(x)$ не є ні парною, ні непарною. Тут $|f(-x)| \neq |f(x)|$; при зміні знаку аргумента змінюється абсолютна величина значення функції. ◀

16. Дослідити на періодичність функції:

а) $y = \sin x^2$; б) $y = \sin \omega x$, $\omega > 0$;

в) $y = \sin x + \sin 3x$.

► а) Припустимо, що існує число $T > 0$, таке, що при всіх значеннях x виконується рівність $\sin x^2 = \sin(x+T)^2$.

Розв'язуємо рівняння

$$\begin{aligned} (\sin x^2 - \sin(x+T)^2 = 0) &\Leftrightarrow \Leftrightarrow \left(2 \sin \frac{x^2 - (x+T)^2}{2} \cos \frac{x^2 + (x+T)^2}{2} = 0 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\sin \frac{2xT - T^2}{2} \cos \frac{2x^2 + 2xT + T^2}{2} = 0 \right). \end{aligned}$$

Розв'язок цього рівняння існує, але не є числом, позаяк $T = T(x)$. Тому функція неперіодична. ◀

► б) Шукаємо число T з рівняння

$$\begin{aligned} (f(x+T) - f(x) = 0) &\Leftrightarrow (\sin \omega(x+T) - \sin \omega x = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(2 \sin \frac{\omega T}{2} \cos \left(\omega x + \frac{\omega T}{2} \right) = 0 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{\omega T}{2} = 0, \\ \cos \left(\omega x + \frac{\omega T}{2} \right) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язки другого рівняння $T = T(x)$. З першого рівняння знаходимо $\omega T / 2 = \pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, тобто $T = 2k\pi / \omega$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Отже, функція $\sin \omega x$ – періодична; її періоди $\frac{2\pi}{\omega}, \frac{4\pi}{\omega}, \frac{6\pi}{\omega}, \dots$, основний період $\frac{2\pi}{\omega}$.

◀

► в) Кожний з доданків суми $f(x) = \sin 2x + \sin 3x$ є періодичною функцією (див. попередній приклад) з періодами відповідно $\{\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots, k\pi, \dots\}$ і $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi, \frac{8\pi}{3}, \dots, \frac{2\pi n}{3}, \dots\right\}$, де $k, n \in \mathbb{N}$. Найменший спільний елемент цих двох множин є періодом функції $f(x)$. Отже, $T = 2\pi$. ◀

17. Знайти функції, обернені до заданих:

а) $y = \frac{1}{4}x - 5$; б) $y = \sqrt[6]{x}$;

в) $y = x^2 - x + 1$; г) $y = \arcsin x^4, 0 \leq x \leq 1$.

► а) Функція $y = \frac{1}{4}x - 5$ визначена на всій числовій осі. Отже, її область визначення

$X = D(y) = (-\infty, +\infty)$, а множина значень $Y = E(y) = (-\infty, +\infty)$. В області свого визначення вона зростає. Справді, при $x_2 > x_1$ (тобто при $x_2 - x_1 > 0$) маємо

$$y(x_2) - y(x_1) = \left(\frac{1}{4}x_2 - 5 \right) - \left(\frac{1}{4}x_1 - 5 \right) = \frac{1}{4}(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow (y(x_2) > y(x_1)).$$

Тому обернена функція існує. Розв'язавши рівняння $y = \frac{1}{4}x - 5$ відносно x , знаходимо обернену функцію $x = 4y + 20$. Переходимо тепер до звичних позначень: аргумент позначимо через x , а залежну змінну – y . Обернена функція – $y = 4x + 20$. ◀

► б) Із змісту рівності $y = \sqrt[6]{x}$ бачимо, що область визначення функції $D(y) = [0; +\infty)$, а множина значень $E(y) = [0; +\infty)$. Функція в області визначення зростає $y_2 - y_1 = \sqrt[6]{x_2} - \sqrt[6]{x_1} > 0$, якщо $x_2 - x_1 > 0$.

Тому обернена функція існує і також зростає. Для вираження x через y перетворюємо рівняння $y = \sqrt[6]{x}$ таким чином $y^6 = x$. Переходячи до звичних позначень (замінюємо y на x , а x на y), одержимо $y = x^6$, де $0 \leq x < \infty$. ◀

►в) Знаходимо проміжки зростання і спадання функції $y = x^2 - x + 1$. Нехай $x_2 > x_1$. Зробивши перетворення

$$\begin{aligned} y(x_2) - y(x_1) &= (x_2^2 - x_2 + 1) - (x_1^2 - x_1 + 1) = (x_2^2 - x_1^2) - (x_2 - x_1) = \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 1) = (x_2 - x_1) \left(\left(x_2 - \frac{1}{2} \right) + \left(x_1 - \frac{1}{2} \right) \right), \end{aligned}$$

бачимо, що $y(x_2) - y(x_1) > 0$ при $x_2, x_1 \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$ і $y(x_2) - y(x_1) < 0$ при $x_2, x_1 \in \left(-\infty, \frac{1}{2} \right]$.

Отже, функція $y = x^2 - x + 1$ зростає на проміжку $\left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$ і спадає на проміжку $\left(-\infty, \frac{1}{2} \right]$,

набираючи значень з $E(y) = Y = \left(\frac{3}{4}; +\infty \right)$. Тому на кожному з проміжків вона має обернену.

Знайдемо функцію, обернену до $y = x^2 - x + 1$ на проміжку зростання. Перепишемо задану функцію так $y = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$, звідки $\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 = y - \frac{3}{4}$. Отже, при $x \geq \frac{1}{2}$ маємо

$x - \frac{1}{2} = \sqrt{y - \frac{3}{4}}$, $y \geq \frac{3}{4}$. Одержали обернену функцію $x = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}$. Поміняємо місцями x

та y , тоді $y = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$. Ця функція здійснює відображення проміжку $\left[\frac{3}{4}; +\infty \right)$ на $\left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$.

Подібним чином, знаходиться функція, обернена до даної на проміжку спадання $\left(-\infty, \frac{1}{2} \right]$. ◀

►г) Відомо, що функція $y = \arcsin t$ при $-1 \leq t \leq 1$ зростає. Тому, враховуючи, що $x^4 > 0$, можемо стверджувати: функція $y = \arcsin x^4$ при $x \in [0; 1] = X$ також зростає.

Множиною її значень є проміжок $Y = [\arcsin 0; \arcsin 1] = \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

Таким чином, функція, обернена до $y = \arcsin x^4$ при $x \in [0; 1]$, існує

$$(y = \arcsin x^4) \Rightarrow \left(x^4 = \sin y, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

У звичних позначеннях (x – незалежна змінна, y – залежна змінна) цю функцію запишемо у вигляді $y = \sqrt[4]{\sin x}$. Вона відображає $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ на $[0;1]$. ◀

18. Побудувати графіки функцій:

а) $y = 3^x - 3^{-x}$; б) $y = x \sin x$;

в) $y = 2^{|x|}$; г) $y = 2 \sin(2x - 1)$.

► а) Будуємо графіки функцій $y_1 = 3^x$ і $y_2 = 3^{-x}$ пунктирними лініями, додаємо графічно їх ординати: оскільки знаки y_1 і y_2 протилежні то таке „додавання“ означає зменшення ординати y_1 на абсолютну величину ординати y_2 . При цьому треба враховувати, що із зростанням x ордината y_2 нескінченно скорочується (прямує до нуля). Аналогічно, ордината $y_1 \rightarrow 0$ при русі абсциси x точки графіка на нескінченність вліво. Шуканий графік показано на рисунку суцільною лінією (рис. 2). ◀

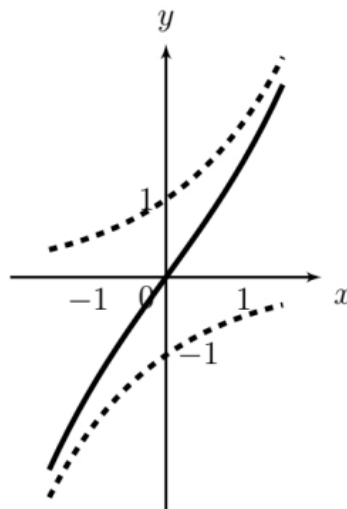


Рисунок 2: побудова графіка $y = 3^x - 3^{-x}$

► б) Функція $y = x \sin x$ – парна як добуток двох непарних функцій $y_1 = x$ і $y_2 = \sin x$, тому аналіз і побудову графіка досить проводити для $x \geq 0$. Звертаємо увагу на абсциси точок графіків-множників, ординати яких дорівнюють нулю або ± 1 . В точках з такими абсцисами ординати добутку $y(x) = x \sin x$ будуть відповідно нулем (графік перетинає вісь Ox) або ординатою першого множника: $y(x) = x$, $y(x) = -x$.

Останні рівності підказують: для побудови графіка $y = x \sin x$ доцільно побудувати графіки функцій $y_1 = x$ і $y_3 = -x$; тоді графік $y(x) = x \sin x$ „коливатиметься“ в куті між

прямими $y(x) = x$ і $y(x) = -x$ аналогічно до того, як синусоїда „коливається“ у смугі між прямими $y = \pm 1$ (рис. 3). ◀

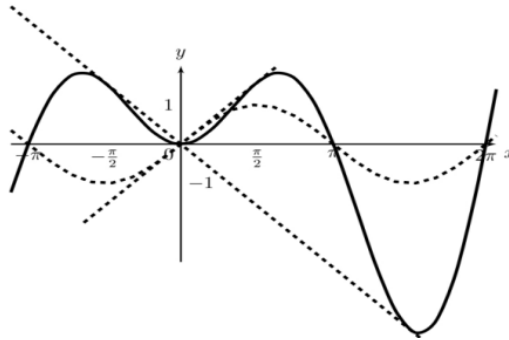


Рисунок 3: побудова графіка $y = x \sin x$

► в) Для побудови графіка $y = 2^{|x|}$ досить побудувати лише частину графіка функції $y = 2^x$ для $x \geq 0$. Графіком $y = 2^{|x|}$ для $x < 0$ буде дзеркальне відображення відносно осі ординат вже побудованого графіка $y = 2^x$, $x \geq 0$ (рис. 4). ◀

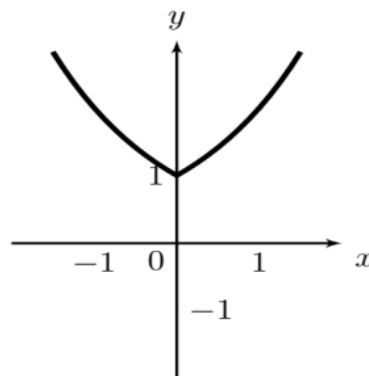


Рисунок 4: побудова графіка $y = 2^{|x|}$

► г) Для побудови графіка функції $y = 2 \sin(2x - 1)$ перепишемо дане рівняння у вигляді $y = 2 \sin 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ і скористаємось „перетворенням“ графіка функції $y = \sin x$ до графіка $Af(kx + b)$: тут $A = 2$, $k = 2$, $b = -1$ $\left(a = \frac{b}{k} = -\frac{1}{2}\right)$.

Отже, послідовність побудови така. Будуємо графік функції $y = \sin x$; „стискаємо“ його вздовж осі Ox (до осі Oy) в два рази – одержуємо $y_2 = \sin 2x$; після цього зсуваємо його на $1/2$ одиниці праворуч – одержуємо $y_3 = \sin 2\left(x - 1/2\right) = \sin(2x - 1)$ і, нарешті, розтягуємо останній графік вздовж осі ординат (від осі Ox) у два рази – одержимо $y = 2 \sin(2x - 1)$ (рис. 5) ◀

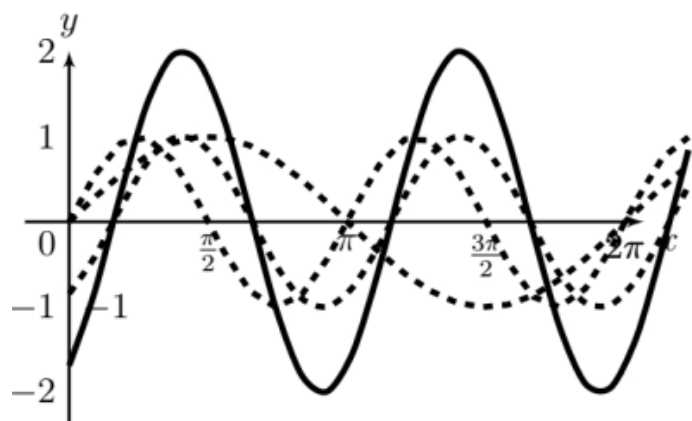


Рисунок 5: побудова графіка $y = 2 \sin(2x - 1)$