

Завдання для самостійного розв'язання

1. Нехай $A = \{-1; 2; 4; 6; 11; 14\}$, $B = \{-1; 3; 5; 6; 14; 18\}$. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$

2. Визначити істинність висловлювання:

- а) число 56 ділиться на 9;
- б) Варшава – столиця Польщі;
- в) $\forall x \in \mathbb{R} x - 5 > 13$;
- г) гора Говерла розміщена у Гімалаях.

3. Довести ірраціональність чисел:

- а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{7}$; в) $\sqrt{11}$; г) $0,838338333\dots$;

4. Розв'язати рівняння:

- а) $|5x - 4| = x^2$; б) $|\cos x| + \cos x - 2 = 0$;
- в) $\left| \frac{2x-5}{2x+5} \right| = \frac{2x-5}{2x+5}$; г) $|x^2 - 9x + 8| = -(x^2 - 9x + 8)$;

5. Розв'язати нерівності:

- а) $|3x - 1| < 5$; б) $|-2x + 5| > 2$;
- в) $|2x - 3| - |-3x + 5| > 0$; г) $|x^2 + 8x| > |x^2| + |8x|$.

6. Довести обмеженість числових множин:

- а) множина дробів вигляду $\left\{ \frac{11n^2}{3n^2 + 7} \right\}$, де $n \in \mathbb{N}$;
- б) множина дробів вигляду $\left\{ \frac{15n^3 - 1}{5n^3 + 4} \right\}$, де $n \in \mathbb{N}$.

7. Задано функцію $f(x) = \frac{2x^3 - 8}{4 + 3x}$. Знайти:

- а) $f(-2x)$; б) $f(-x^2)$; в) $4f(x)$; г) $[f(x)]^2$.

8. Задано функції $f(x) = 3^{x^3}$, $\varphi(x) = x^3$. Знайти вираз для $f^3(x) + \varphi^2(x)$.

9. Задано функцію $f(x) = |x + 2| - x - 2$. Знайти значення:

- а) $f(-3)$; б) $f(0)$; в) $f(3)$; г) $f(-2)$;
- д) $f(2)$ і побудувати графік функції.

10. Задано функцію $f(x) = \begin{cases} 2x^3 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 3 - x & \text{при } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Знайти значення: а) $f(0)$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; в) $f\left(\frac{3}{2}\right)$; г) $f(2)$ і побудувати графік функції.

11. Задано функцію $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } -1 < x < 0, \\ 1 + \sqrt{x} & \text{при } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$

Знайти значення: а) $f(1)$; б) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; в) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; г) $f(0)$; д) чи існує $f(3)$?

12. Суперпозицією яких основних елементарних функцій можуть бути одержані функції:

а) $y = \sin^2 \frac{x+2}{4}$; б) $y = \sqrt[3]{(x-7)^4}$;

в) $y = 3^{\arccos^2 x^3}$; г) $y = \operatorname{arctg}^2 \left(\operatorname{tg} \frac{x^2 + 3x}{5} \right)$?

13. Знайти області визначення функцій:

а) $f(x) = \sqrt{9-x^2} + \frac{7}{x}$; б) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{9} - 3\right)$;

в) $f(x) = \frac{1}{(3-x)e^x}$; г) $f(x) = \frac{x-6}{\cos 6x}$;

д) $f(x) = \ln|25-x^2|$; е) $f(x) = \frac{x}{\lg(3+x)}$;

є) $f(x) = \frac{4x-9}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; ж) $f(x) = \sqrt{6-x} + \arcsin \frac{x+2}{5}$.

14. Функцію $y = f(x)$ задано на відрізку $[0; 1]$. Які області визначення функцій:

а) $f(\cos x)$; б) $f(3x-4)$?

15. Дослідити на парність і непарність функції

а) $f(x) = x^2 - 4|x|$; б) $f(x) = x \sin x - x^4$;

в) $f(x) = \frac{(1-2^x)^3}{4}$; г) $f(x) = 3^x + 3^{-x}$;

д) $f(x) = \lg \cos x$; е) $f(x) = x^2 \cos 9x$.

16. Знайти основні періоди функцій:

а) $f(x) = \sin 5x$; б) $f(x) = -2 \cos \frac{x}{3} + 1$;

в) $f(x) = \lg \cos 2x$; г) $f(x) = \operatorname{tg} 3x + \cos 4x$.

17. Знайти функції, обернені до заданих; вказати їх області визначення і множини значень:

а) $f(x) = \arccos \frac{x}{3}$ при $-3 \leq x \leq 3$;

б) $f(x) = 6^{\ln x}$; в) $f(x) = 3^{\frac{x+3}{x-9}}$;

г) $f(x) = \sin(3x-1)$ при $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\right) \leq x \leq \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\right)$.

18. Побудувати графіки функцій за відомими графіками функцій $y = \varphi(x)$:

а) $f(x) = \cos(-3x+4)+1$ ($\varphi(x) = \cos x$);

б) $f(x) = -3\sin(5x+3)$ ($\varphi(x) = \sin x$);

в) $f(x) = \arccos(2x-5)$ ($\varphi(x) = \arccos x$);

г) $f(x) = 2\sin x - 3\cos x$ ($\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = \cos x$);

г) $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$ ($\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = \frac{1}{x}$);

д) $f(x) = x + 2\cos x$ ($\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = \cos x$);

е) $f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{при } x < 0, \\ 2x^2 & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$

е) $f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{при } x < -1, \\ 5 & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ x^2 + 5 & \text{при } x > 0. \end{cases}$

Відповіді до завдань для самостійного розв'язання

1. $A \cup B = \{-1; 2; 3; 4; 5; 6; 11; 14; 18\}$, $A \cap B = \{-1; 6; 14\}$,

$A \setminus B = \{2; 4; 11\}$, $B \setminus A = \{3; 5; 18\}$.

2. а) хибне; б) істинне; в) хибне; г) хибне.

3. Доведення ірраціональності див. приклад 11 у розділі 1.

4. а) $-1; 4; \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$; б) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

в) $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right); [1; 8]$.

5. а) $\left(-\frac{4}{3}; 2\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$; в) $\left(\frac{8}{5}; 2\right)$; г) $\emptyset$.

6. а) $\frac{11n^2}{3n^2+7} < \frac{11}{7} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{15n^3-1}{5n^3+4} < 3 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

7. а) $f(-2x) = \frac{8x^3+4}{3x-2}$; б) $f(-x^2) = \frac{2x^6+8}{3x^2-4}$;

в) $4f(x) = \frac{4(2x^3-8)}{4+3x}$; г) $[f(x)]^2 = \left(\frac{2x^3-8}{4+3x}\right)^2$.

8. $f^3(x) + \varphi^2(x) = 3^{3x^3} + x^6$.

9. а) $f(-3) = 2$; б) $f(0) = 0$; в) $f(3) = 0$;

г) $f(-2) = 0$; д) $f(2) = 0$.

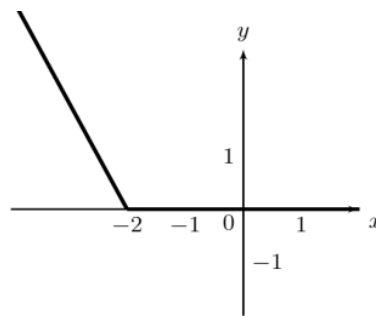


Рисунок 6: графік $f(x) = |x+2| - x - 2$ до прикладу 9

10. а) $f(0) = 0$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; в) $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$; г) $f(2) = 1$.

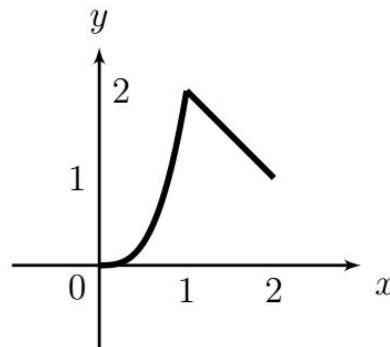


Рисунок 7: графік $f(x)$ до прикладу 10

11. а) $f(1) = 2$; б) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ невизначено;

в) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; г) $f(0) = 1$; д) $f(3)$ не існує.

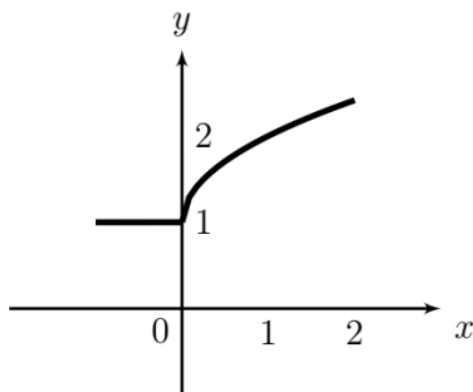


Рисунок 8: графік $f(x)$ до прикладу 11

12. а) $y = u^2$, де $u = \sin w$, $w = \frac{x+2}{4}$;

б) $y = u^{\frac{4}{3}}$, де $u = x-7$;

в) $y = 3^u$, де $u = v^2$, $v = \arccos w$, $w = x^3$;

г) $y = u^2$, де $u = \arctg v$, $v = \tg w$, $w = \frac{x^2 + 3x}{5}$.

13. а) $[-3; 0) \cup (0; 3]$; б) $[18; 36]$; в) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$;

г) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{6} \right)$ д) $(-5; 5)$;

е) $(-\infty; +\infty)$; є) $[-7; 3]$.

14. а) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right]$ б) $\left[\frac{4}{3}; \frac{5}{3} \right]$.

15. а) парна; б) парна; в) ні парна, ні непарна;

г) парна; д) парна; е) парна.

16. а) $\frac{2\pi}{5}$; б) 6π ; в) π ; г) π .

17. а) $y = \cos 3x$, $x \in [0; \pi]$, $y \in [-3; 3]$;

б) $y = e^{\log_6 x}$, $x \in (0; +\infty)$, $y \in (0; +\infty)$;

в) $y = 9 + \frac{12}{\log_3 \frac{y}{3}}$, $x \in (0; \infty)$, $y \in (-\infty; 9) \cup (9; +\infty)$;

г) $y = \frac{1}{3} \arcsin x + \frac{1}{3}$, $x \in [-1; 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \right]$.

18. а) графік до прикладу на рис. 9;

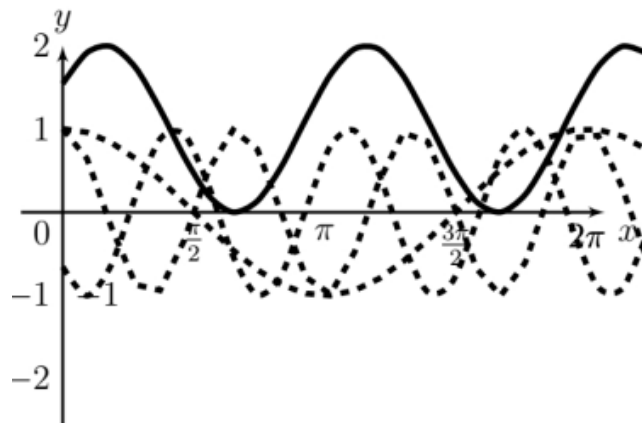


Рисунок 9: побудова графіка $y = \cos(-3x + 4) + 1$

б) графік до прикладу на рис. 10;

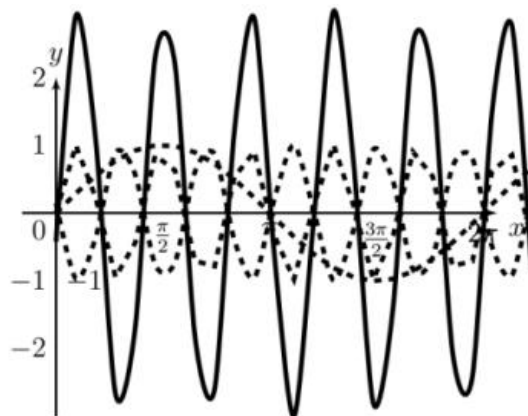


Рисунок 10: побудова графіка $y = -3\sin(5x + 3)$

в) графік до прикладу на рис. 11;

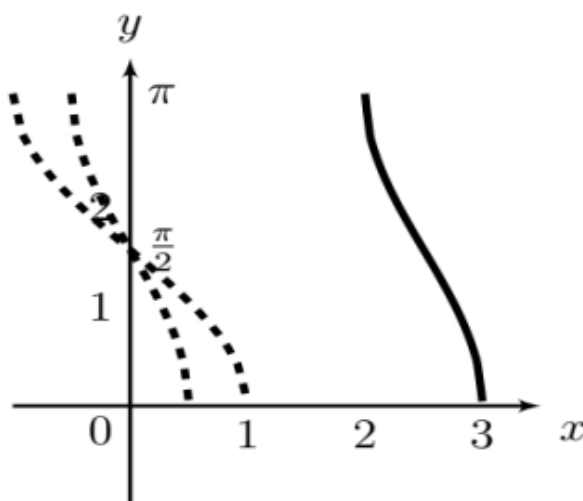


Рисунок 11: побудова графіка $y = \arccos(2x - 5)$

г) графік до прикладу на рис. 12;

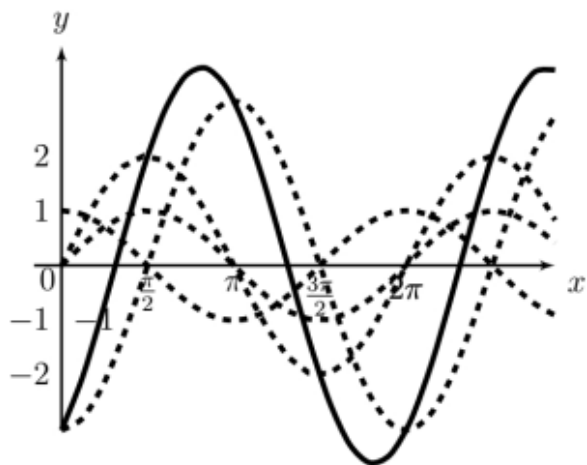


Рисунок 12: побудова графіка $y = 2\sin x - 3\cos x$

г) графік до прикладу на рис. 13;

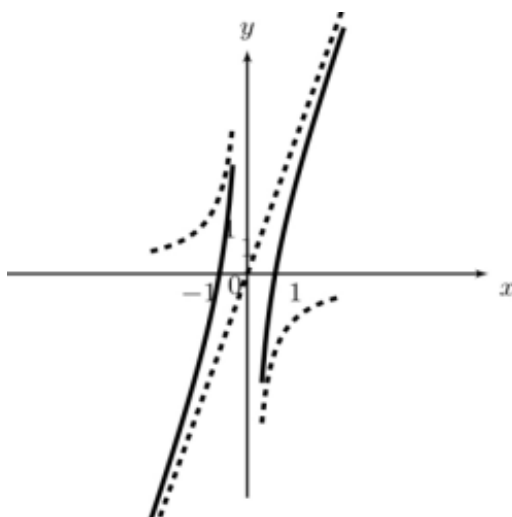


Рисунок 13: побудова графіка $y = 3x - \frac{1}{x}$

д) графік до прикладу на рис. 14;

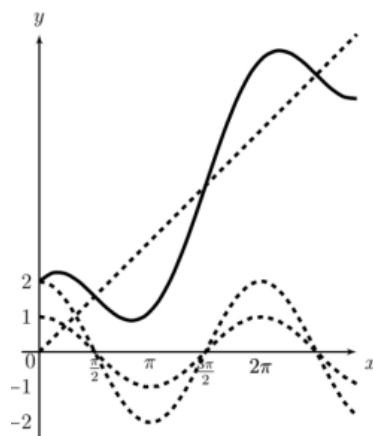


Рисунок 14: побудова графіка $y = x + 2\cos x$

е) графік до прикладу на рис. 15;

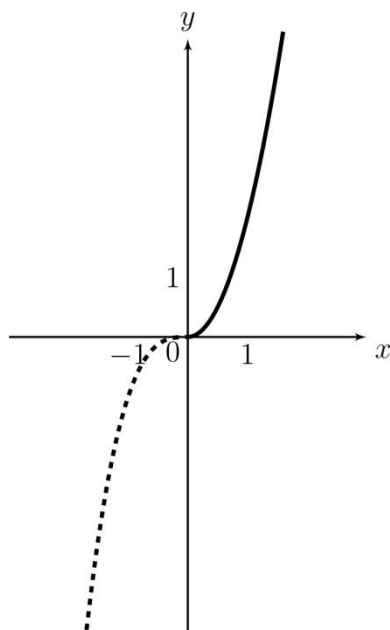


Рисунок 15: побудова графіка $f(x)$

є) графік до прикладу на рис. 16.

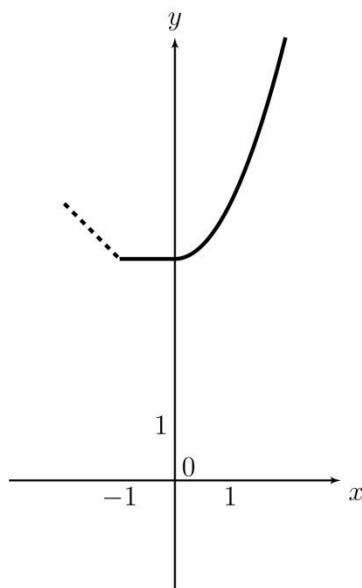


Рисунок 16: побудова графіка $f(x)$