

§ 1. Диференціювання функцій

1.1 Похідна функції. Диференціювання складених функцій

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому δ – околі точки x_0 і $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – її приріст в цій точці, що відповідає приросту аргументу $\Delta x = x - x_0 \neq 0$, де $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Границя відношення $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ називається *похідною функції* $y = f(x)$ в точці

x_0 . Ця границя позначається $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $f'(x)|_{x=x_0}$. Таким чином,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Інші позначення похідної в точці x : $(f(x))'$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}(f(x))$, $\frac{dy}{dx}$, y'_x , y' .

Операція знаходження похідної функції називається **диференціюванням** цієї функції.

Основні правила диференціювання:

1. $C' = 0$.

2. $(Cu)' = u' \pm v'$.

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

4. $(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

6. $(f(u))'_x = f'_u \cdot u'_x$.

7. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, де $x = x(y)$ – обернена функція для функції $y = y(x)$.

У правилах диференціювання 1-6: C – стала, $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Має місце також **правило диференціювання добутку n функцій** $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$, ..., $z = z(x)$:

$$(u \cdot v \cdot w \cdot \dots \cdot z)' = u' \cdot v \cdot w \cdot \dots \cdot z + u \cdot v' \cdot w \cdot \dots \cdot z + \dots + u \cdot v \cdot w \cdot \dots \cdot z'.$$

Основні формули диференціювання

1. $(u^a)' = au^{a-1} \cdot u'$, $a \in \mathbb{R}$.

10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

2. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$.

11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

3. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.

12. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

4. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$.

13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

14. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$.

6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

15. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.

$$\begin{array}{ll}
7. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'. & 16. (\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'. \\
8. (\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'. & 17. (\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'. \\
9. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'. &
\end{array}$$

Тут $u=u(x)$. Якщо $u(x)=x$, то $u'(x)=x'=1$.

1.2 Логарифмічне диференціювання. Похідні неявних функцій та функцій, заданих параметрично

Логарифмічне диференціювання. Логарифмічною похідною функції $y = f(x)$ називається похідна від логарифму цієї функції, тобто

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Послідовне застосування логарифмування та диференціювання функцій називається *логарифмічним диференціюванням*. У деяких випадках попереднє логарифмування функції спрощує знаходження її похідної.

Для знаходження похідної від складеної *показникової* функції

$$y = u^v,$$

де $u=u(x)$, $v=v(x)$, $u(x)>0$, попередньо застосовують логарифмування.

Маємо

$$\ln y = v \ln u, \quad \frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}, \quad y' = y \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right),$$

$$y' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'.$$

Зауважимо, що похідну від складеної показникової функції можна також знаходити, подаючи цю функцію у вигляді

$$y = u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}.$$

Тоді

$$y' = (u^v)' = (e^{v \ln u})' = e^{v \ln u} \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'.$$

Отримали такий же результат.

Похідна неявної функції. Якщо залежність між x та y задана в неявній формі $F(x, y) = 0$, то для знаходження похідної $y'_x = y'$ треба:

1) обчислити похідну по x від лівої та правої частини заданого рівняння $F(x, y) = 0$, вважаючи y функцією від x .

Отримаємо $F_1(x, y, y') = 0$;

2) розв'язати останнє рівняння відносно y' .

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \text{ то похідна від неї обчислюється за формулою } \begin{cases} y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x = x(t). \end{cases}$$
$$\left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Механічний зміст другої похідної. Якщо $s = s(t)$ – функція, що описує закон руху матеріальної точки, то $\frac{d^2s}{dt^2} = a$ – прискорення цієї точки в момент часу t .

Похідні вищих порядків від функцій, що задані неявно. Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$.

Продиференціювавши обидві частини цього рівняння по змінній x , вважаючи, що $y = f(x)$, отримаємо рівняння першого степеня відносно y' , тобто $F_1(x, y, y') = 0$. Звідси знаходимо y' .

Продиференціювавши обидві частини останнього рівняння по x , вважаючи, що y та y' функції від x , отримаємо рівняння відносно y'' , тобто $F_2(x, y, y', y'') = 0$, і т. д.

Похідні вищих порядків від функцій заданих параметрично. Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Похідні від такої функції обчислюються за формулами

$$\begin{cases} y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, & \begin{cases} y''_{xx} = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, & \begin{cases} y'''_{xxx} = \frac{d(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \\ x = x(t); \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

і т. д.

Диференціал вищих порядків. Диференціалом n -го порядку від функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала $(n-1)$ порядку цієї функції, тобто $d^n y = d(d^{n-1} y)$.

Якщо задана функція $y = f(x)$, де x – незалежна змінна, то маємо

$$d^2 y = d(dy) = y'' dx^2,$$

$$d^3 y = d(d^2 y) = y''' dx^3,$$

.....

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = y^n dx^n.$$

Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, u – залежна змінна, то маємо

$$d^2 y = y''_{uu} du^2 + y'_u d^2 u$$

Аналогічно знаходяться диференціали більш високих порядків.