

Приклади розв'язання задач

1. Виходячи із означення похідної, знайти похідну функції $y = \sqrt[3]{x}$ в будь-якій точці $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

► Надамо фіксованому значенню $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ приросту Δx . Йому відповідає приріст функції $\Delta y = \sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}$. Виходячи з означення, знайдемо границю

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{1 + \Delta x/x} - 1)}{\Delta x} = \\ &= \left| \sqrt[3]{1 + \Delta x/x} - 1 \sim \Delta x/3x \right|_{\Delta x \rightarrow 0} = \sqrt[3]{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{3x\Delta x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

Значить, $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ◀

2. Знайти похідні вказаних функцій

а) $y = 5x^3 - 6x^2 + 7x + 4$; б) $y = x^3 \operatorname{arctg} x$;

в) $y = \frac{\arcsin x}{x}$; г) $y = \left(17 + \frac{3}{x^4}\right)^{12}$;

д) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; е) $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$.

► а) Застосовуючи правило диференціювання суми функцій, маємо

$$y' = (5x^3 - 6x^2 + 7x + 4)' = 5 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 15x^2 - 12x + 7. \quad \blacktriangleleft$$

► б) Застосовуючи правило диференціювання добутку функцій, маємо

$$y' = (x^3 \operatorname{arctg} x)' = 3x^2 \operatorname{arctg} x + x^3 \frac{1}{1+x^2} = 3x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{x^3}{1+x^2}. \quad \blacktriangleleft$$

► в) Застосовуючи правило диференціювання частки функцій, маємо

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \arcsin x \cdot 1}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}. \quad \blacktriangleleft$$

► г) Застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневої функції та суми, маємо

$$\begin{aligned} y' &= \left(\left(17 + \frac{3}{x^4} \right)^{12} \right)' = \left((17 + 3x^{-4})^{12} \right)' = 12(17 + 3x^{-4})^{11} \cdot 3 \cdot (-4)x^{-5} = \\ &= -\frac{144}{x^5} \left(17 + \frac{3}{x^4} \right)^{11}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► д) Застосовуючи правило диференціювання складної функції, логарифмічної функції та суми, маємо

$$y' = \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)' = \left(\ln(x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}) \right)' = \frac{1}{x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right) =$$

$$= \frac{1}{x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{1}{x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + x}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \blacktriangleleft$$

► е) Перепишемо задану функцію $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$ у вигляді $y = x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)$. Тоді

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) \right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2) + x^{\frac{3}{2}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x. \blacktriangleleft$$

3. Обчислити значення похідної функції $f(x) = (1 + x^2)\ln x \cdot \operatorname{arctg} x$ при $x = 1$.

► На основі формули диференціювання добутку функцій отримаємо

$$f'(x) = 2x\ln x \operatorname{arctg} x + (1 + x^2) \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x + (1 + x^2)\ln x \cdot \frac{1}{1 + x^2} =$$

$$= 2x\ln x \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1}{x} + x \right) \operatorname{arctg} x + \ln x.$$

Підставляючи $x = 1$, обчислюємо $f'(1) = 2 \operatorname{arctg} 1 = \pi / 2$. $\blacktriangleleft$

4. Знайти похідну функції $y = (\operatorname{arctg} 4x)^{x^2}$.

► Приймаємо логарифмічне диференціювання і будемо також використовувати наступні властивості логарифмів:

$$\ln uv = \ln u + \ln v; \ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v; \ln u^v = v \ln u.$$

Логарифмуючи дану функцію за основою e , знаходимо

$$\ln y = x^2 \ln \operatorname{arctg} 4x.$$

Диференціюємо обидві частини цього рівняння по x , враховуючи, що y є функція аргумента x , і звертаючи увагу на праву частину рівняння, де записано похідні двох функцій,

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \operatorname{arctg} 4x + x^2 \frac{1}{\operatorname{arctg} 4x} \frac{4}{1 + (4x)^2}.$$

Перемножуючи обидві частини останнього рівняння на y

і підставляючи $(\operatorname{arctg} 4x)^{x^2}$ замість y , отримуємо

$$y' = \left(2x \ln \operatorname{arctg} 4x + \frac{4x^2}{(1 + 16x^2) \operatorname{arctg} 4x} \right) (\operatorname{arctg} 4x)^{x^2}. \blacktriangleleft$$

5. Знайти похідну функції $y = x^{\cos 3x}$.

► Маємо складену показникову функцію, бо і основа і степінь залежать від x .

Прологарифмувавши задану функцію $y = x^{\cos 3x}$, маємо

$$\ln y = \cos 3x \cdot \ln x.$$

Далі диференціюємо обидві частини останньої рівності по x

$$(\ln y)' = (\cos 3x \cdot \ln x)'.$$

$$\text{Звідси } \frac{y'}{y} = -\sin 3x \cdot 3 \cdot \ln x + \cos 3x \cdot \frac{1}{x}.$$

$$\text{Отже, } y' = y \left(-3 \sin 3x \cdot \ln x + \frac{\cos 3x}{x} \right), \text{ тобто}$$

$$y' = x^{\cos 3x} \left(-3 \sin 3x \cdot \ln x + \frac{\cos 3x}{x} \right). \blacktriangleleft$$

$$6. \text{ Знайти похідну функції } y = \frac{(2x-3)^3 \cdot \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}}.$$

► Запишемо задану функцію у вигляді

$$y = \frac{(2x-3)^3 \cdot (3x+2)^{\frac{1}{2}}}{(5x+4)^2 \cdot (1-x)^{\frac{1}{3}}}.$$

Прологарифмуємо задану функцію

$$\ln y = 3 \ln(2x-1) + \frac{1}{2} \ln(3x+2) - 2 \ln(5x-4) - \frac{1}{3} \ln(1-x).$$

Продиференціювавши обидві частини останньої рівності по x

$$(\ln y)' = \left(3 \ln(2x-1) + \frac{1}{2} \ln(3x+2) - 2 \ln(5x-4) - \frac{1}{3} \ln(1-x) \right)',$$

одержимо

$$\frac{y'}{y} = 3 \cdot \frac{1}{2x-1} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3x+2} \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{5x+4} \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1),$$

$$y' = y \left(\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3x+2} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)} \right).$$

Отже,

$$y' = \frac{(2x-1)^3 \cdot \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}} \cdot \left(\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)} \right). \blacktriangleleft$$

7. Знайти похідну від неявної функції $y = y(x)$, заданої рівнянням:

$$a) x^3 - 2xy^2 + y^3 = a^3;$$

$$б) \cos \frac{y}{x} = y^2.$$

► а) Диференціюємо обидві частини рівняння по змінній x , вважаючи y функцією аргумента x (тоді $\frac{d}{dx}(y^2) = 2yy'$ і $\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2y'$), і враховуємо, що $a^3 = \text{const}$.

В результаті виконання зазначених операцій отримаємо

$$3x^2 - 2(y^2 + 2xyy') + 3y^2y' = 0.$$

$$\text{Звідси } 3y^2 - 4xy)y' = 2y^2 - 3x^2; \quad y' = \frac{2y^2 - 3x^2}{3y^2 - 4xy}.$$

► б) Диференціюючи по x , маємо

$$-\sin \frac{y}{x} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = 2yy' \Leftrightarrow \left(2x^2y + x \sin \frac{y}{x} \right) y' = y \sin \frac{y}{x},$$

$$\text{звідси } y' = \frac{y \sin \frac{y}{x}}{2x^2y + x \sin \frac{y}{x}}. \blacktriangleleft$$

8. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$

► Знайдемо похідну $\frac{dy}{dx}$. Оскільки

$$\frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t; \quad \frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t,$$

$$\text{то } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t, \\ x = a \cos^3 t. \end{cases}$$

9. Знайти приріст і диференціал функції $y = x^3 + 4$ при переході аргумента від значення $x_1 = 2$ до значення $x_2 = 2,01$.

► Знайдемо спочатку приріст заданої функції при довільних значеннях x і Δx

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 + 4 - (x^3 + 4) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + \\ &+ (\Delta x)^3 + 4 - x^3 - 4 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3, \end{aligned}$$

$$\text{тобто } \Delta y = 3x^2\Delta x + (3x\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x.$$

Знайдемо тепер Δy і dy при заданих значеннях аргумента. Враховуючи, що $\Delta x = x_2 - x_1 = 2,01 - 2 = 0,01$, отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta y \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0,01}} &= 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 + 3 \cdot 2(0,01)^2 + (0,01)^3 = \\ &= 0,12 + 0,0006 + 0,000001 = 0,120601; \end{aligned}$$

$$dy \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0,01}} = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 = 0,12.$$

Обчислимо абсолютну похибку, яку ми допустили при заміні приросту функції її диференціалом,

$$|\Delta y - dy| = |0,120601 - 0,12| = 0,000601.$$

Відносна похибка

$$\frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|} = \frac{0,000601}{0,120601} \approx 0,00498 \approx 0,005 \text{ (або 0,5 \%)}.$$

10. Знайти диференціал dy функції $y = \sin^6 3x$.

► Відповідно до означення $dy = y' \Delta x$. Знаходимо похідну заданої функції

$$y' = (\sin^6 3x)' = 6 \sin^5 3x \cdot \cos 3x \cdot 3.$$

Отже, $dy = 18 \sin^5 3x \cdot \cos 3x dx$. ◀

11. Обчислити наближене значення $\sqrt[3]{27,1}$.

► Розглянемо функцію $y = \sqrt[3]{x}$. Покладемо $x=27$, $\Delta x=0,1$ і застосуємо формулу

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x.$$

В нашому випадку $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Отже, маємо

$$\sqrt[3]{27,1} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} \cdot 0,1 = 3 + \frac{1}{3 \cdot 3^2} \cdot 0,1 = 3 + \frac{0,1}{27} = 3,0037.$$

12. Обчислити наближено $\sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}}$.

► Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3}{x^2 + 5}}$ і обчислимо її наближене значення в точці

$x = 2,037$, прийнявши $x_0 = 2$ і $\Delta x = 0,037$. Тоді $f(x_0) = f(2) = 1/3$,

$$f'(x_0) = f'(2) = \sqrt{\frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}} \cdot \frac{8x}{(x^2 + 5)^2} \Big|_{x=2} = \frac{16}{27}.$$

Отже, $\sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}} \approx \frac{1}{3} + \frac{16}{27} \cdot 0,037 \approx 0,333 + 0,022 = 0,355$. ◀

13. Знайти похідну другого порядку від функції $y = \ln(1 - x)$.

► Знаходимо першу похідну $y' = (\ln(1 - x))' = \frac{-1}{1 - x}$.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{d(t^3 + 2t + 1)}{d(\ln t)} = \frac{(t^3 + 2t + 1)'_t}{(\ln t)'_t} = \frac{3t^2 + 2}{\frac{1}{t}} = 3t^3 + 2t \text{ Тоді } y'' = \left(\frac{-1}{1-x} \right)' = \frac{-1}{(1-x)^2}. \blacktriangleleft$$

14. Знайти $y'_x = \frac{dy}{dx}$ та $y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ від функції, заданої параметрично $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3 + 2t + 1. \end{cases}$

$$\blacktriangleright \begin{cases} y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{d(t^3 + 2t + 1)}{d(\ln t)} = \frac{(t^3 + 2t + 1)'_t}{(\ln t)'_t} = \frac{3t^2 + 2}{1/t} = 3t^3 + 2t, \\ x = \ln t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{d(3t^3 + 2t)}{d(\ln t)} = \frac{(3t^3 + 2t)'_t}{(\ln t)'_t} = \frac{9t^2 + 2}{1/t} = 9t^3 + 2t, \\ x = \ln t. \end{cases} \blacktriangleleft$$

15. Знайти y' та y'' від функції, заданої неявно рівнянням $x^2 + y^2 = 1$.

► Диференціюємо ліву та праву частини рівняння

$$x^2 + y^2 = 1$$

вважаючи, що $y = y(x)$. Згідно з правилом диференціювання складеної функції, маємо $2x + 2y \cdot y' = 0$, або $x + y \cdot y' = 0$.

Звідси $y' = -\frac{x}{y}$. Далі диференціюємо ліву та праву частини рівняння $x + y \cdot y' = 0$,

вважаючи, що $y = y(x)$, $y' = y'(x)$. Маємо $1 + (y')^2 + y \cdot y'' = 0$. Звідси

$$y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y}.$$

Враховуючи вираз для $y' = -\frac{x}{y}$, отримаємо

$$y'' = -\frac{1 + \frac{x^2}{y^2}}{y} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

Але згідно з умовою $x^2 + y^2 = 1$, отже остаточно маємо

$$y'' = -\frac{1}{y^3}. \blacktriangleleft$$

16. Знайти диференціал другого порядку $d^2 y$ від функції $y = \ln(1 + x^2)$.

► Відповідно до означення $d^2 y = y'' dx^2$.

Знаходимо y' та y'' :

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}; \quad y'' = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Отже, $d^2y = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} dx^2$.