

Завдання для самостійного розв'язання

У задачах 1 – 14 знайти похідні вказаних функцій.

1. $y = 3x^2 - 5x + 1$. 2. $y = 3 - 2x + \frac{2}{3}x^4$.

3. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$. 4. $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt{3}$.

5. $y = \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$. 6. $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$.

7. $y = (x^2 - 3x + 2)(x^4 + x^2 - 1)$. 8. $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$.

9. $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + 9)$. 10. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

11. $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$. 12. $y = \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$.

13. $y = \frac{1}{x^3 + 3x - 1}$. 14. $y = \frac{a + bx}{c + dx}$.

15. $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$. Знайти: $f(1)$, $f'(1)$, $f(4)$, $f'(4)$.

16. $f(t) = \frac{t^2 - 5t - 1}{t^3}$. Знайти: $f(-1)$, $f'(-1)$, $f'(2)$.

17. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Знайти: $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

18. $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+1}$. Знайти: $f'(0)$, $f'(-1)$.

У задачах 19 – 64 знайти похідні вказаних функцій.

19. $y = (1 + 4x^2)^3$. 20. $y = (1 - x)^{20}$.

21. $y = (x^3 - x)^6$. 22. $y = \left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$.

23. $y = (1 - 2\sqrt{x})^4$. 24. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$.

25. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$. 26. $y = \sin 3x$.

27. $y = 3\sin(3x + 5)$. 28. $y = 6\cos\frac{2x}{3}$.

29. $y = \cos^2 x$. 30. $y = \cos^3 4x$.

31. $y = 3\sin^2 x - \sin^3 x$. 32. $y = \cos x^3$.

$$33. y = \sin^2 x \cdot \sin x^2.$$

$$34. y = \sin \sqrt{1+x^2}.$$

$$35. y = (1 + \sin^2 x)^4.$$

$$36. y = \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right).$$

$$37. y = x \arcsin x.$$

$$38. y = (\arcsin x)^2.$$

$$39. y = \frac{\arccos x}{x}.$$

$$40. y = \arcsin(x-1).$$

$$41. y = \operatorname{arctg} x^2.$$

$$42. y = \arcsin \frac{2}{x}.$$

$$43. y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}.$$

$$44. y = x^2 \log_3 x.$$

$$45. y = \ln^2 x.$$

$$46. y = \frac{1}{\ln x}.$$

$$47. y = \ln(x^2 - 4x).$$

$$48. y = \log_3(x^2 - 1).$$

$$49. y = \ln \operatorname{tg} x$$

$$50. y = \ln^4 \sin x.$$

$$51. y = x \cdot 10^x.$$

$$52. y = x \cdot e^x.$$

$$53. y = e^x \cos x.$$

$$54. y = x^3 - 3^x.$$

$$55. y = 10^{2x-3}.$$

$$56. y = a^{\sin^3 x}.$$

$$57. y = 10^{1-\sin^4 3x}.$$

$$58. y = \operatorname{sh}^3 x.$$

$$59. y = \ln \operatorname{ch} x.$$

$$60. y = \operatorname{th}(1-x^2).$$

$$61. y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x.$$

$$62. y = \sqrt{\operatorname{ch} x}.$$

$$63. y = e^{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$64. y = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x.$$

У задачах 65 – 72 знайти похідні від заданих функцій, використовуючи логарифмічне диференціювання.

$$65. y = x^{x^2}.$$

$$66. y = (\sin x)^{\cos x}.$$

$$67. y = (\ln x)^x.$$

$$68. y = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$69. y = (x^2 + 1)^{\sin x}.$$

$$70. y = x^3 e^{x^2} \sin 2x.$$

$$71. y = \frac{(x-2)^2 \cdot \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}.$$

$$72. y = \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}.$$

У задачах 73 – 82 знайти похідні від функцій y , заданих неявно.

$$73. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$74. x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$$

$$75. x^3 + y^3 - 3axy = 0. \quad 76. y^3 - 3y + 2ax = 0.$$

$$77. y^2 - 2xy + b^2 = 0. \quad 78. \sin(xy) + \cos(xy) = 0.$$

$$79. 2^x + 2^y = 2^{x+y}. \quad 80. y = \cos(x + y).$$

$$81. \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad 82. y = 1 + xe^y.$$

У задачах 83 – 93 знайти похідну $y' = \frac{dy}{dx}$ від функцій, заданих параметрично.

$$83. \begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3. \end{cases} \quad 84. \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$$

$$85. \begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}. \end{cases} \quad 86. \begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi. \end{cases}$$

$$87. \begin{cases} x = a \cos^3 \varphi, \\ y = b \sin^3 \varphi. \end{cases} \quad 88. \begin{cases} x = a(\phi - \sin \phi), \\ y = a(1 - \cos \phi). \end{cases}$$

$$89. \begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases} \quad 90. \begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$$

$$91. \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases} \quad 92. \begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$$

$$93. \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases}$$

У задачах 94 – 98 знайти диференціал заданих функцій.

$$94. y = (1 + x - x^2)^3. \quad 95. y = \operatorname{tg}^2 x. \quad 96. y = 2^{\frac{1}{\cos x}}.$$

$$97. y = \frac{\cos x}{1 - x^2}. \quad 98. y = 3^{\frac{1}{x}} + 3x^3 - 4\sqrt{x}.$$

99. Обчислити наближено:

$$\text{a) } \arcsin 0,05; \quad \text{б) } \operatorname{arctg} 1,04; \quad \text{в) } \ln 1,2.$$

100. Обчислити наближено:

$$\text{a) } \operatorname{arctg} 1,02; \quad \text{б) } \operatorname{arctg} 0,97.$$

101. Обчислити наближено:

$$\text{a) } \sqrt{5}, \sqrt{17}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{70}; \quad \text{в) } \sqrt[4]{17}.$$

102. Обчислити наближено:

а) $\sin 31^\circ$; б) $\cos 61^\circ$; в) $\operatorname{tg} 44^\circ$.

103. Знайти наближені значення функцій:

а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ при $x = 0,98$;

б) $f(x) = \sqrt{1+x}$ при $x = 0,2$;

в) $f(x) = e^{1-x^2}$ при $x = 1,05$.

У задачах 104 – 112 знайти похідні другого порядку від заданих функцій.

104. $y = x^2 - 3x + 2$.

105. $y = (x^2 + 1)^3$.

106. $y = \cos^2 x$.

107. $y = \operatorname{arctg} x^2$.

108. $y = e^{x^2}$.

109. $y = \frac{1}{1+x^3}$.

110. $y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$.

111. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

112. $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$.

113. Знайти $f''(1)$, якщо $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

114. Знайти $f^{(4)}(1)$, якщо $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$.

115. Знайти $f''(1)$, якщо $f(x) = e^{2x-1}$.

116. Знайти $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, якщо $y(x) = e^{2x} \sin 3x$.

117. Знайти $y''(2)$, якщо $y(x) = \ln(x-1)$.

118. Знайти $f^{(4)}(1)$, якщо $y(x) = x^3 \ln x$.

У задачах 119 – 124 знайти формулу для похідної n -го порядку від заданих функцій.

119. $y = e^{ax}$.

120. $y = e^{-x}$.

121. $y = xe^x$.

122. $y = \frac{1}{ax+b}$.

123. $y = \ln(ax+b)$.

124. $y = \log_a x$.

У задачах 125 – 131 знайти похідні вказаних порядків для функцій заданих неявно.

125. $y^2 = 2px$. Знайти y'' .

126. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Знайти y'' .

127. $x^2 + y^2 = r^2$. Знайти y''' .

128. $y = \operatorname{tg}(x+y)$. Знайти y''' .

129. $s = 1 + t \cdot e^s$. Знайти s'' .

130. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$. Знайти y'' .

131. $e^{x+y} = xy$. Знайти y'' .

У задачах 132 – 138 знайти похідні вказаних порядків від функцій, заданих параметрично.

132. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$ Знайти $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

133. $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$ Знайти $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

134. $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$ Знайти $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

135. $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin \varphi), \\ y = a(1 - \cos \varphi). \end{cases}$ Знайти $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

136. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases}$ Знайти $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

137. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$ Знайти $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

138. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$ Знайти $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

У задачах 139 – 145 знайти диференціали вказаних порядків.

139. $y = \sqrt[3]{x^2}$. Знайти $d^2 y$.

140. $y = x^m$. Знайти $d^3 y$.

141. $y = (x+1)^3(x-1)^2$. Знайти $d^2 y$.

142. $y = 4^{-x^2}$. Знайти $d^2 y$.

143. $y = x(\ln x - 1)$. Знайти dy , $d^2 y$, $d^3 y$.

144. $y = x^2 e^{-x}$. Знайти $d^3 y$.

145. $y = \frac{x^4}{2-x}$. Знайти $d^4 y$.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. $6x - 5$. 2. $-2 + \frac{8}{3}x^3$. 3. $-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}$. 4. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$.

5. $\frac{1}{x}(-\frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}})$. 6. $4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$.

7. $6x^5 - 15x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 2x + 3$. 8. $\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.
9. $2x(3x^4 + 8x^2 - 41)$. 10. $\frac{2}{(x+1)^2}$. 11. $\frac{1-4x^2-x^4}{(x^3-x)^2}$.
12. $\frac{2}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^2}$. 13. $\frac{-3(x^2+1)}{(x^3+3x-1)^2}$. 14. $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$.
15. $f(1)=1, f'(1)=2, f(4)=8, f'(4)=2,5$.
16. $f(-1)=-5, f'(-1)=-8, f'(2)=\frac{19}{16}$.
17. $f'(0)=11, f'(1)=2, f'(2)=-1$.
18. $f'(0)=-0,25; f'(-1)=0,5$.
19. $24x(1+4x^2)^2$. 20. $-20(1-x)^{19}$.
21. $6(x^3-x)^5(3x^2-1)$. 22. $\frac{5(1+x^2)^4(x^2+2x-1)}{(1+x)^6}$.
23. $\frac{-4(1-2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$. 24. $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$. 25. $\frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.
26. $3\cos 3x$. 27. $9\cos(3x+5)$. 28. $-4\sin \frac{2x}{3}$.
29. $-\sin 2x$. 30. $-12\cos^2 4x \cdot \sin 4x$. 31. $\frac{3}{2}\sin 2x(2-\sin x)$.
32. $-3x^2 \sin x^3$. 33. $2\sin x(x\sin x \cdot \cos x^2 + \cos x \cdot \sin x^2)$.
34. $\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$. 35. $4(1+\sin^2 x)^3 \cdot \sin 2x$.
36. $\frac{1}{2}\sin x$. 37. $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 38. $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
39. $-\frac{x+\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}$. 40. $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.
41. $\frac{2x}{1+x^4}$. 42. $-\frac{2}{\sqrt{x^4-4x^2}}$. 43. $-\frac{2\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x^2+1}$.
44. $2x\log_3 x + \frac{x}{\ln 3}$. 45. $\frac{2\ln x}{x}$. 46. $-\frac{1}{x\ln^2 x}$.
47. $\frac{2x-4}{x^2-4x}$. 48. $\frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$. 49. $\frac{2}{\sin 2x}$.

50. $4 \ln^3 \sin x \cdot \operatorname{ctg} x$. 51. $10^x (1 + x \ln 10)$. 52. $e^x (1 + x)$.
53. $e^x (\cos x - \sin x)$. 54. $3x^2 - 3^x \ln 3$. 55. $2 \cdot 10^{2x-3} \ln 10$.
56. $a^{\sin^3 x} \ln a \cdot 3 \sin^2 x \cdot \cos x$.
57. $-12 \cdot 10^{1-\sin^4 3x} \ln 10 \cdot \sin^3 3x \cdot \cos 3x$.
58. $3 \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch} x$. 59. $\operatorname{th} x$. 60. $-\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$.
61. $2 \operatorname{sh} 2x$. 62. $\frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$. 63. $e^{\operatorname{ch}^2 x} \operatorname{sh} 2x$.
64. $x \cdot \operatorname{ch} x$. 65. $x^{x^2+1} (2 \ln x + 1)$.
66. $(\sin x)^{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln \sin x \right)$.
67. $(\ln x)^x \left(\frac{1}{\ln x} + \ln \ln x \right)$. 68. $x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x)$.
69. $(x^2 + 1)^{\sin x} \left(\frac{2x \sin x}{x^2 + 1} + \cos x \cdot \ln(x^2 + 1) \right)$.
70. $x^2 e^{x^2} \sin 2x (3 + 2x^2 + 2x \operatorname{ctg} 2x)$.
71. $-\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}}$.
72. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2} ((\arcsin x)^2 - 1)} \cdot \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}$.
73. $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$. 74. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. 75. $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$. 76. $\frac{2a}{3(1-y^2)}$.
77. $\frac{y}{y-x}$. 78. $-\frac{y}{x}$. 79. $2^{x-y} \frac{2^y - 1}{1 - 2^x}$. 80. $-\frac{\sin(x+y)}{1 + \sin(x+y)}$.
81. $\frac{x+y}{x-y}$. 82. $\frac{e^y}{1 - xe^y}$. 83. $\frac{3}{2} t^2$. 84. $\frac{3t^2 - 1}{2t}$. 85. -1 .
86. $-\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \varphi$. 87. $-\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$. 88. $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$. 89. $\frac{t}{2}$. 90. $-2e^{3t}$.
91. $\frac{2}{3 \cdot \sqrt[6]{t}}$. 92. $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$. 93. tgt . 94. $3(1+x-x^2)^2(1-2x)dx$.
95. $\frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$. 96. $-2 \frac{1}{\cos x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$.

$$97. \frac{(x^2-1)\sin x + 2x\cos x}{(1-x^2)^2} dx. \quad 98. \left(3^{-\frac{1}{x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{2}{x^2} + 9x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$99. \text{a) } 0,05; \text{б) } 0,765; \text{в) } 0,2. \quad 100. \text{a) } 0,795; \text{б) } 0,77.$$

$$101. \text{a) } 2,25; 4,13; \text{б) } 2,17; 4,13; \text{в) } 2,03.$$

$$102. \text{a) } 0,515; \text{б) } 0,485; \text{в) } 0,965. \quad 103. \text{a) } 2,03; \text{б) } 1,1; \text{в) } 0,9.$$

$$104. 2. \quad 105. 6(5x^4 + 6x^2 + 1). \quad 106. -2\cos 2x.$$

$$107. \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}. \quad 108. 2e^{x^2}(1+2x^2). \quad 109. \frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}.$$

$$110. \frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x. \quad 111. -\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}.$$

$$112. -\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}. \quad 113. -\frac{1}{2}. \quad 114. 360. \quad 115. 4e.$$

$$116. y'(0) = 3, \quad y''(0) = 12, \quad y'''(0) = 9. \quad 117. -1.$$

$$118. 6. \quad 119. a^n e^{ax}. \quad 120. (-1)^n e^{-x}. \quad 121. e^x(x+n).$$

$$122. \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}. \quad 123. \frac{(-1)^{n-1} a^n (n-1)!}{(ax+b)^n}. \quad 124. \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n \ln a}.$$

$$125. -\frac{p^2}{y^3}. \quad 126. -\frac{b^4}{a^2 y^3}. \quad 127. -\frac{3r^2 x}{y^5}.$$

$$128. -\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}. \quad 129. \frac{(3-s)e^{2s}}{(2-s)^3}.$$

$$130. -\frac{2a^3 xy}{(y^2-ax)^3}. \quad 131. -\frac{y((x-1)^2+(y-1)^2)}{x^2(y-1)^3}.$$

$$132. 9t^3. \quad 133. -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}. \quad 134. -\frac{3b \cos t}{a^3 \sin^5 t}.$$

$$135. -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{\varphi}{2}}. \quad 136. -6e^{3t}(t^2+3t+1).$$

$$137. 4t^2. \quad 138. \frac{1-5\sin^2 t}{9a^2 \cos^7 t \sin^3 t}. \quad 139. -\frac{2}{9x \cdot \sqrt[3]{x}} dx^2.$$

$$140. m(m-1)(m-2)x^{m-3} dx^3. \quad 141. 4(x+1)(5x^2-2x-1) dx^2.$$

$$142. 2 \cdot 4^{-x^2} \cdot \ln 4 \cdot (2x^2 \ln 4 - 1).$$

$$143. dy = \ln x dx, \quad d^2 y = \frac{1}{x} dx^2, \quad d^3 y = -\frac{1}{x^2} dx^3.$$

144. $-e^{-x}(x^2 - 6x + 6)dx^3$. **145.** $\frac{384}{(2-x)^5}dx^4$.