

1.5 Розкриття невизначеностей за допомогою правила Лопіталя

Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ та $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

Теорема (правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$:

- 1) задовольняють умовам теореми Коші в деякому околі точки $x = a$;
- 2) прямують до 0 (або $\pm\infty$) при $x \rightarrow 0$;
- 3) існує границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна або нескінченна, рівна $+\infty$ або $-\infty$).

Тоді існує і $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопіталя справедливе і при $a = \pm\infty$.

Правило Лопіталя може застосовуватись повторно. На кожному етапі застосування правила Лопіталя слід користуватися спрощеними тотожними перетвореннями, а також комбінувати це правило з будь-якими способами обчислення границь, зокрема, використовувати еквівалентні нескінченно малі та нескінченно великі.

Слід також пам'ятати, що $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ може існувати, а $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ не існує. Тоді правило Лопіталя не

може бути застосовано.

Розкриття невизначеностей типу $\{0 \cdot \infty\}$ та $\{\infty - \infty\}$.

У цих випадках слід алгебраїчно перетворити дану функцію так, щоб привести її до невизначеного типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, а далі використовувати правило Лопіталя.

а) нехай $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$. Перетворимо $f(x) \cdot g(x)$ таким чином $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$, або $f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$.

Тоді маємо невизначеність типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ при $x \rightarrow a$.

б) нехай $f(x) \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow a$. Перетворимо вираз $f(x) - g(x)$ таким чином

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}}.$$

Маємо невизначеність типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \rightarrow a$.

Розкриття невизначеностей типу $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$, $\{0^0\}$

У всіх трьох випадках розглядаємо обчислення границі виразу $(f(x))^{g(x)}$ при $x \rightarrow a$, причому:

якщо $f \rightarrow 1$, $g \rightarrow \infty$, маємо невизначеність типу $\{1^\infty\}$;

якщо $f \rightarrow \infty$, $g \rightarrow 0$, маємо невизначеність типу $\{\infty^0\}$;

якщо $f \rightarrow 0$, $g \rightarrow 0$, маємо невизначеність типу $\{0^0\}$.

Перетворимо вираз $(f(x))^{g(x)}$ таким чином $f^g = e^{g \ln f}$.

Тоді $\lim_{x \rightarrow a} f^g = \lim_{x \rightarrow a} e^{g \ln f} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g \ln f}$.

В усіх трьох випадках вираз $g \ln f$ при $x \rightarrow a$ представляє невизначеність типу $\{0 \cdot \infty\}$.

До такого ж результату приходимо, якщо попередньо прологарифмуємо праву і ліву частину рівності $y = f^g$.

Маємо $\ln y = g \ln f$. Звідси $y = e^{g \ln f}$, або $f^g = e^{g \ln f}$.

2.2 Основні теореми диференціального числення

Теорема 1 (Ферма). Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки c і досягає в цій точці найменшого або найбільшого значення. Тоді, якщо існує $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Теорема 2 (Ролля). Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна на $[a, b]$ і диференційовна на (a, b) . Тоді, якщо $f(a) = f(b)$, то існує така точка $c \in (a, b)$, що $f'(c) = 0$.

Теорема 3 (Лагранжа). Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна на $[a, b]$ і диференційовна на (a, b) . Тоді існує така точка $c \in (a, b)$, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Теорема 4 (Коші). Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначена та неперервні на $[a, b]$, диференційовні на (a, b) і $g'(x) \neq 0$ в усіх точках $x \in (a, b)$. Тоді існує така точка $c \in (a, b)$, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2.3 Формула Тейлора

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі $U_\delta(a) = (x - \delta; x + \delta)$ точки a і диференційовна n раз у точці $x = a$. Тоді для будь-якого $x \in U_\delta(a)$ справедлива формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x),$$

яка називається формулою *Тейлора* для функції $f(x)$ з центром в точці a . Тут $f^{(0)}(a) = f(a)$, $R_n(x)$ – залишковий член.

Як бачимо, формула Тейлора подає функцію у вигляді суми многочлена та залишкового члена. Залишковий член можна записати у формі *Пеано* $R_n(x) = o((x-a)^n)$ при $x \rightarrow a$.

Відзначимо, що коли функція $f(x)$ диференційовна до $(n+1)$ -го порядку включно в $U_\delta(a)$, то залишковий член можна подати у формі *Лагранжа* $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$, де ξ знаходиться між точками a і x (чи x і a), тобто $\xi = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$.

При $a = 0$ з формули Тейлора, отримуємо, як частинний випадок, *формулу Маклорена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x).$$

Для цієї формули залишкові члени мають вигляд:

у формі Пеано $R_n(x) = o(x)^n$ при $x \rightarrow 0$;

у формі Лагранжа $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} (x)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

Наведемо основні розклади функцій за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n); \quad \sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n});$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n);$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

У випадку залишкового члена у формі Лагранжа маємо:

для функції $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$;

для функції $\sin x$: $R_{2n-1} = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x$, $0 < \theta < 1$;

для функції $\cos x$: $R_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x$, $0 < \theta < 1$;

для функції $\ln(1+x)$: $R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+\theta x} \right)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$;

для функції $(1+x)^m$: $R_n(x) = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{m-n-1}$, $0 < \theta < 1$.

Формула Тейлора широко застосовується при обчисленні значень функції з заданою точністю. Нехай, наприклад, потрібно обчислити значення функції $f(x)$ в точці x_0 з абсолютною похибкою, яка не перевищує ε , якщо відомо значення цієї функції та її похідних у точці a . З формули Тейлора випливає, що

$$f(x_0) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x_0 - a) + \dots + \frac{f^{(n_0)}(a)}{n_0!} (x_0 - a)^{n_0},$$

де n_0 – мінімальний з номерів n , для яких $|R_{n+1}(x)| < \varepsilon$.