

Приклади розв'язання задач

17. Показати, що правило Лопітала не може бути використане для обчислення вказаної границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}.$$

Обчислити цю границю, не використовуючи правило Лопітала.

► Чисельник і знаменник даного дробу неперервні, диференційовні та прямують до нескінченності. Відношення похідних $\frac{(x + \sin x)'}{(x + \cos x)'} = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$ не має границі при $x \rightarrow \infty$, бо якщо $k \rightarrow \infty$, то при $x_k = 2\pi k \rightarrow \infty$ це відношення дорівнює 2, а при $\tilde{x}_k = \pi + 2\pi k \rightarrow \infty$ дорівнює нулю.

Отже, правило Лопітала не може бути використано, бо границя відношення похідних не існує.

Обчислюємо границю безпосередньо, не використовуючи цього правила,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = 1. \blacktriangleleft$$

18. Знайти границі, використовуючи правило Лопітала (невизначеність типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$):

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$

г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^x - 1}.$

► а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 1}{xe^x} = \frac{3}{e}; \blacktriangleleft$$

► б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} =$

$$= \left| \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{6x} = \frac{1}{6} \text{ (тут правило Лопітала застосовується двічі); } \blacktriangleleft$$

► в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2 \cos^2 x} =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \\
&= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x^2} \cdot 3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \\
&= \left| \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}; \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \text{r)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^x - 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 \frac{1}{1+x^2}}{e^x \left(-\frac{3}{x^2} \right)} =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = \frac{2}{3}. \blacktriangleleft$$

19. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$):

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{x \ln(x-5)}{\ln(e^x - e^5)}.$$

$$\blacktriangleright \text{a) } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

$$= \left| \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \right| = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0; \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^3} = 0; \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{в) } \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{x \ln(x-5)}{\ln(e^x - e^5)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = 5 \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{x-5}}{\frac{1}{e^x - e^5} \cdot e^x} =$$

$$= 5 \lim_{x \rightarrow 5} \frac{e^x - e^5}{(x-5)e^5} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \frac{5}{e^5} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{e^x}{1} = \frac{5}{e^5} e^5 = 5. \blacktriangleleft$$

20. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\{0 \cdot \infty\}$):

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln x.$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x} &= \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0; \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= \{0 \cdot \infty\} = \left| \sin(x-1) \sim_{x \rightarrow 1} x-1 \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \sin^2 \frac{\pi x}{2} = -\frac{2}{\pi} \cdot 1^2 = -\frac{2}{\pi}; \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{ в) } \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln x &= \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

21. Знайти границі, використовуючи правило Лопітала (невизначеність типу $\{\infty - \infty\}$):

$$\text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^2} \right); \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \right) = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \left| x^2 \sin^2 x \sim_{x \rightarrow 0} x^4 \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{4x^3} = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \cos 2x \cdot 2}{3x^2} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = \left| \sin 2x \sim_{x \rightarrow 0} 2x \right| = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = \frac{1}{3}; \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right) &= \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x \cdot \sin x}{\cos x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x \sin x - \pi}{2 \cos x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + 2x \cos x}{2(-\sin x)} = -1. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

22. Знайти границі, використовуючи правило Лопітала (невизначеності типу $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$, $\{0^0\}$):

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

► а) Для знаходження $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ скористаємось співвідношенням

$$(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{\ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}} = e^{\frac{3}{x^2} \ln \cos 2x}.$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{x^2} \ln \cos 2x} = \left\{ e^{\frac{0}{0}} \right\} = e^{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2}} = e^{3A}.$$

Тут позначено $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2}$. Знайдемо цю границю, застосовуючи правило Лопітала,

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos 2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2}{2x} =$$

$$= \left| \frac{\sin 2x \sim 2x,}{\cos 2x \rightarrow 1,} \right|_{x \rightarrow 0} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{2x} = -2.$$

$$\text{Отже, } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{3(-2)} = e^{-6}. \blacktriangleleft$$

► б) При знаходженні $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x}$ врахуємо, що $(\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = e^{2 \cos x \ln \operatorname{tg} x}$. Маємо

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = \{\infty^0\} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} e^{2 \cos x \ln \operatorname{tg} x} = \{e^{0 \cdot \infty}\} = e^{2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos x}} = e^{2A},$$

$$\text{де } A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0.$$

$$\text{Отже, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = e^{2 \cdot 0} = e^0 = 1. \blacktriangleleft$$

► в) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = \{0^0\} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)} \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)}} = e^A$, де

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Отже, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = e$. ◀

30. Показати, що задана функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля на $[a, b]$:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 100$; $a = 1, b = 5$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$; $a = 0, b = 8$.

Знайти таке значення $c \in (a, b)$, що $f'(c) = 0$.

► а) Функція $f(x) = x^2 - 6x + 100$ неперервна на відрізку $[1; 5]$. Очевидно, що при всіх x існує $f'(x) = 2x - 6$, тому функція диференційовна на інтервалі $(1; 5)$. Також $f(1) = f(5) = 95$. Отже, виконуються усі умови теореми Ролля. Для знаходження такого $c \in (1; 5)$, що $f'(c) = 0$, розв'яжемо рівняння $f'(x) = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, тобто $c = x = 3$.

◀

► б) Функція $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ неперервна на відрізку $[0; 8]$. Похідна $f'(x) = \frac{8 - 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(8x - x^2)^2}}$ існує для $x \neq 0, x \neq 8$. Отже, існує на інтервалі $(0; 8)$, при цьому $f(0) = f(8) = 0$. Як бачимо, усі умови теореми Ролля виконуються.

Для знаходження точки $c \in (0; 8)$ розв'яжемо рівняння

$$f'(x) = \frac{8 - 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(8x - x^2)^2}} = 0 \Leftrightarrow 8 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Отже, $c = 4$. ◀

31. Чи виконуються умови теореми Ролля для функцій:

а) $f(x) = \frac{5 - x^2}{x^4}$ на відрізку $[-1; 1]$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{(x - 8)^2}$ на відрізку $[0; 16]$?

► а) Для $f(x) = \frac{5 - x^2}{x^4}$ порушена умова неперервності функції на відрізку $[-1; 1]$. Точка $x = 0 \in [-1; 1]$ є точкою розриву функції. ◀

► б) Для $f(x) = \sqrt[3]{(x - 8)^2}$ порушена умова диференційовності функції на інтервалі $(1; 16)$. Дійсно, $f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x - 8}}$ у точці $x = 8 \in (1; 16)$ не існує. ◀

32. Показати, що похідна многочлена $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ має дійсний корінь на інтервалі $(-1; 1)$.

► Функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля (вона неперервна на $[-1; 1]$, диференційовна на інтервалі $(-1; 1)$, $f(-1) = f(1) = 0$). Отже, існує така точка $c \in (-1; 1)$, що $f'(c) = 0$, тобто многочлен $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 1$ має хоча б один дійсний корінь на інтервалі $(-1; 1)$. ◀

33. Перевірити виконання умов теореми Лагранжа для функції $f(x) = x - x^3$ на відрізку $[-2; 1]$ і знайти відповідне проміжне значення c .

► Функція $f(x) = x - x^3$ неперервна на відрізку $[-2; 1]$; існує $f'(x) = 1 - 3x^2$ для усіх $x \in \mathbb{R}$. Отже, функція диференційовна на інтервалі $(-2; 1)$. Як бачимо, умови теореми Лагранжа виконуються на відрізку $[-2; 1]$, тому існує таке $c \in (-2; 1)$, що

$$f(1) - f(-2) = f'(c)(1 - (-2)) \Leftrightarrow 0 - 6 = f'(c) \cdot 3 \Leftrightarrow f'(c) = -2.$$

Враховуючи вираз для $f'(x)$, маємо $1 - 3c^2 = -2 \Leftrightarrow 3c^2 = 3 \Leftrightarrow c^2 = 1 \Leftrightarrow c = \pm 1$. Шукане $c = -1$, бо $-1 \in (-2; 1)$. ◀

34. На дузі AB кривої $f(x) = 2x - x^2$ знайти точку M , в якій дотична паралельна хорді AB , якщо $A(1; 1)$, $B(3; -3)$.

► Функція $f(x) = 2x - x^2$ неперервна та диференційовна при всіх значеннях $x \in \mathbb{R}$, а значить, і на відрізку $[1; 3]$. Відповідно до теореми Лагранжа існує така точка $c \in (1; 3)$, що виконується рівність $f(3) - f(1) = f'(c)(3 - 1)$. У нас $f'(x) = 2 - 2x$. Тому, $(2 \cdot 3 - 3^2) - (2 \cdot 1 - 1^2) = (2 - 2c) \cdot 2 \Leftrightarrow -4 = 4(1 - c) \Leftrightarrow c = 2$, $f(2) = 0$.

Оскільки $f'(2) = -2 = \frac{-3-1}{3-1}$, то значення похідної рівне кутовому коефіцієнту прямої, на якій лежить хорда AB . Отже, ця хорда паралельна дотичній до графіка функції в знайденій точці $M(2; 0)$. ◀

35. Розкласти многочлен $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ за степенями двочлена $x - 2$.

► Знаходимо похідні многочлена та їх значення в точці $x = 2$: $P'(x) = 3x^2 + 4x + 3$; $P''(x) = 6x + 4$; $P'''(x) = 6$; $P^{(n)}(x) = 0$ при $n \geq 4$. Обчислюємо $P(2) = 11$; $P'(2) = 7$; $P''(2) = 8$; $P'''(2) = 6$. Тоді за формулою Тейлора маємо

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x - 2) + \frac{8}{2!}(x - 2)^2 + \frac{6}{3!}(x - 2)^3,$$

або $x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x - 2) + 4(x - 2)^2 + (x - 2)^3$. ◀

36. Розкласти функцію $f(x) = \operatorname{tg} x$ за формулою Маклорена до члена, що містить x^3

включно.

► Знаходимо похідні функції $f(x) = \operatorname{tg} x$ до третього порядку включно, а також їх значення при $x = 0$.

$$\text{Маємо } f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(0) = 0; \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x, \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -2 \cos^{-3} x \cdot (-\sin x) = 2 \cos^{-3} x \cdot \sin x, \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = 6 \cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 2 \cos^{-2} x, \quad f'''(0) = 2.$$

За формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано маємо

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Відзначимо, що оскільки

$$f^{(4)}(x) = 6(4 \cos^{-5} x \cdot \sin^3 x + \cos^{-4} x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x) + 2 \cdot 2 \cdot \cos^{-3} x \cdot \sin x, \quad f^{(4)}(0) = 0, \text{ то залишковий}$$

член можна записати у вигляді $o(x^4)$, тобто $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$. ◀

37. Розвинути функцію $f(x) = \sqrt[3]{x}$ за формулою Тейлора з центром розкладу у точці $a = 1$ (за степенями $(x - 1)$) до члена $(x - 1)^3$ включно.

► Обчислимо значення функції $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ та її похідні до третього порядку включно при $x = a = 1$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}, \quad f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}}, \quad f'''(x) = \frac{10}{27} x^{-\frac{8}{3}};$$

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{3}, \quad f''(1) = -\frac{2}{9}, \quad f'''(1) = \frac{10}{27}.$$

Отже, за формулою Тейлора одержимо

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) - \frac{2}{9 \cdot 2!}(x - 1)^2 + \frac{10}{27 \cdot 3!}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3). \quad \blacktriangleleft$$

38. Знайти з точністю до 10^{-3} наближене значення $\sqrt[3]{29}$.

► Запишемо $\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27 + 2} = 3\left(1 + \frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Скористаємось біноміальним розкладом:

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n.$$

Звідси маємо наближену рівність

$$(1+x)^m \approx 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

похибка якої $R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$ може стати як завгодно малою при

$|x| < 1$ і достатньо великому n .

Поклавши $x = \frac{2}{27}$ і $m = \frac{1}{3}$, отримаємо

$$\sqrt[3]{29} = 3\left(1 + \frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\left(1 + \frac{2}{81} - \frac{2^2}{81^2} + \frac{2^3 \cdot 5}{3 \cdot 81^3} - \frac{2^5 \cdot 5}{3 \cdot 81^4} + \dots + R_n\right).$$

Оцінюючи послідовно величини похибок обчислення $3|R_n|$, знаходимо

$$3|R_1| < 3 \cdot \frac{2^2}{81^2} < 0,002; \quad 3|R_2| < \frac{2^3 \cdot 5}{81^3} < 0,00007.$$

Отже, для обчислення $\sqrt[3]{29}$ з заданою точністю достатньо взяти три члени, які передують залишку R_2 , тобто

$$\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + 0,024 - 0,0006) = 3,072. \blacktriangleleft$$

39. Використовуючи розклади функції за формулою Тейлора (Маклорена), обчислити задані границі:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) - \sin 2(x-1)}{(x-1) + \sin 3(x-1)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2 \sin x - 3x}{x^4}.$$

$$\blacktriangleright \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) - \sin 2(x-1)}{(x-1) + \sin 3(x-1)} = \left| \frac{\sin 2(x-1) = \frac{2(x-1)}{1!} + o(x-1),}{\sin 3(x-1) = \frac{3(x-1)}{1!} + o(x-1)} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) - 2(x-1) - o(x-1)}{(x-1) + 3(x-1) + o(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{4(x-1)} = -\frac{1}{4}; \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2 \sin x - 3x}{x^4} = \left| \frac{\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4),}{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) + 2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - 3x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0.$$