

§ 2. Застосування диференціального числення

2.1 Геометричні та механічні застосування похідної

Геометричний зміст похідної полягає в тому, що похідна функції $f(x)$ при даному значенні аргументу x_0 рівна кутовому коефіцієнту дотичної до графіка цієї функції в точці $M_0(x_0, f(x_0))$, тобто $f'(x_0) = \operatorname{tg} a$, де a – величина кута, утвореного дотичною з додатнім напрямком осі Ox . Тому рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, де $y_0 = f(x_0)$, має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Пряма, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярна до дотичної, називається *нормаллю* до графіка функції $y = f(x)$ в цій точці.

Якщо $f'(x_0) \neq 0$, то рівняння нормалі записується у вигляді

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Коли $f'(x_0) = 0$, нормаль має рівняння $x = x_0$.

Дотична та нормаль до кривої $y = f(x)$ у точці M визначає такі чотири відрізки (рис. 2): $t = TM$ – відрізок дотичної, $s_t = TK$ – *піддотична*, $n = NM$ – відрізок нормалі, $s_n = KN$ – *піднормаль*.

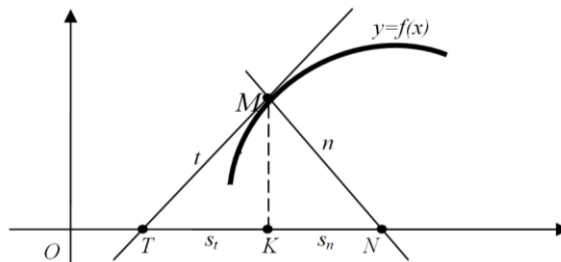


Рисунок 2

Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину $M_0(x_0, y_0)$ називається кут φ між дотичними до цих кривих у точці M_0 . Кут між двома кривими знаходиться за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)} \right|.$$

Фізичний зміст похідної. Якщо при прямолінійному русі точки задано закон руху $s = s(t)$, то швидкість руху в момент часу t є похідною від шляху по часу, тобто $v = s'(t)$; а прискорення цієї точки в момент часу t другою похідною від шляху по часу, тобто $a = s''(t)$.

2.4 Дослідження функцій та побудова графіків

Зростання та спадання функцій. Функція $f(x)$ називається *зростаючою* на інтервалі (a, b) , якщо для $\forall x_1, x_2 \in (a, b): x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Якщо ж при $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається *спадною*.

Якщо $f'(x) > 0$ на (a, b) , то функція $f(x)$ *зростає* на цьому інтервалі. Якщо $f'(x) < 0$ на (a, b) , то

функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

Інтервали зростання та спадання функції називаються інтервалами *монотонності*.

Екстремуми функції. Точка $x = x_0$ називається точкою *локального максимуму* функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $U_\delta(x_0)$ точки x_0 , що $\forall x \in U_\delta(x_0), x \neq x_0$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.

Аналогічно точка $x = x_0$ – точка *локального мінімуму* функції $f(x)$, якщо для $\forall x \in U_\delta(x_0), x \neq x_0$ виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.

Точки локального максимуму та локального мінімуму функції $f(x)$ називаються точками *локального екстремуму* цієї функції, а значення функції в цих точках – локальними екстремумами. Надалі ми слово «локальний» опускатимемо.

Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 і має в цій точці екстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Відзначимо, що ця умова не є достатньою. Наприклад, точка $x_0 = 0$ не є точкою екстремуму для функції $f(x) = x^3$, а $f'(0) = 0$.

Точка x_0 , в якій $f'(x_0) = 0$, називається *стаціонарною*. Точки, в яких $f'(x_0)$ рівна нулю, нескінченності або не існує, називаються *критичними* точками. В цих точках дотична до кривої $y = f(x)$ або горизонтальна, або вертикальна, або не має двосторонньої дотичної.

Достатні умови екстремуму. Ці умови задаються такими правилами:

1. Нехай функція $f(x)$ диференційовна в деякому околі $U_\delta(x_0)$ критичної точки x_0 , за виключенням, можливо, самої точки x_0 . Тоді, якщо:

а) $f'(x) > 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) < 0$, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 – точка локального максимуму функції $f(x)$;

б) $f'(x) < 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) > 0$, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 – точка локального мінімуму функції $f(x)$;

в) $f'(x)$ не змінює знаку при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$, то точка x_0 не є точкою локального екстремуму.

2. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна в критичній точці x_0 і в деякому її околі. Тоді, якщо:

а) $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимуму;

б) $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка мінімуму;

в) $f''(x_0) = 0$, то потрібні додаткові дослідження.

3. Нехай функція $f(x)$ n раз диференційовна в критичній точці x_0 і $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тоді, якщо:

а) n – парне число, то x_0 – точка локального екстремуму; при цьому, якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму, $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального мінімуму;

б) n – непарне число, то точка x_0 не є точкою локального екстремуму.

Опуклість, угнутість. Точки перегину. Нехай функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a; b)$.

Графік функції $f(x)$ називається *опуклим вверх* або *опуклим* на інтервалі $(a; b)$, якщо він розташований нижче дотичної, проведеної до графіка в будь-якій точці з абсцисою із цього інтервалу. Графік функції $f(x)$ називається *опуклим вниз* або *угнутим* на інтервалі $(a; b)$, якщо він розташований вище дотичної, проведеної до графіка в будь-якій точці з абсцисою із цього інтервалу.

Точка $(x_0, f(x_0))$ графіка функції, яка відділяє його опуклу частину від угнутої, називається *точкою перегину*.

Достатня умова опуклості (угнутості) графіка функції. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна на інтервалі (a, b) . Тоді, якщо:

а) $f''(x) < 0$ на $(a; b)$, то графік функції $f(x)$ є *опуклим* на $(a; b)$;

б) $f''(x) > 0$ на $(a; b)$, то графік функції $f(x)$ є *угнутим* на $(a; b)$.

Із означення точки перегину та достатніх умов опуклості (угнутості) випливає, що коли x_0 – абсциса точки перегину графіка функції $y = f(x)$, то друга похідна в цій точці дорівнює нулю, нескінченності або не існує.

Точки, в яких $f''(x)$ рівна нулю, нескінченності або не існує, називаються *критичними точкам другого роду*.

Достатня умова точки перегину. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна в деякому околі $U_\delta(x_0)$ критичної точки другого роду x_0 , за виключенням, можливо, самої точки x_0 . Тоді, якщо $f''(x)$ в інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ має протилежні знаки, то x_0 – абсциса точки перегину. Якщо $f''(x)$ має однаковий знак у цих інтервалах, то x_0 не є точкою перегину.

Асимптоти. Пряма L називається *асимптотою* графіка функції $f(x)$, якщо відстань від точки M графіка функції до прямої L $\rho(M, L) \rightarrow 0$ при віддаленні точки M у нескінченність.

Вертикальні асимптоти. Пряма $x = a$ є *вертикальною* асимптотою графіка функції $f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$. Неперервні функції не мають вертикальних асимптот.

Похили асимптоти. Пряма $y = kx + b$ є *похилою* асимптотою графіка функції $f(x)$, якщо існують скінченні границі

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx), \quad \text{або} \quad k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx).$$

Як бачимо, похилих асимптот може бути не більше двох. У випадку, коли $k = 0$, похилу асимптоту називають *горизонтальною*.

Схема повного дослідження функції.

Для повного дослідження функції та побудови її графіка можна рекомендувати таку схему:

- 1) вказати область визначення функції; по можливості знайти точки перетину функції з осями координат;
- 2) дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву функції, якщо вони існують, і встановити їх характер;

- 3) знайти асимптоти графіка функції;
- 4) дослідити функцію на парність, непарність (симетрію графіка), періодичність;
- 5) визначити інтервали зростання та спадання функції та екстремуми;
- 6) визначити інтервали опуклості та угнутості графіка функції та точки перегину;
- 7) провести необхідні додаткові дослідження: сталість знаку функції, розташування графіка відносно осей координат (вище, нижче), поведінка функції на нескінченності, тощо.

Побудову графіка рекомендується виконувати поступово, переходячи від пункту до пункту схеми, з нанесенням знайдених у кожному пункті характеристик.

2.5 Знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізьку

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізьку $[a, b]$, то вона досягає на цьому відрізьку своїх найбільшого та найменшого значень. Для знаходження цих значень треба:

- а) знайти всі критичні точки функції $f(x)$ на відрізьку $[a; b]$;
- б) обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках;
- в) обчислити значення функції $f(x)$ у точках $x = a$, $x = b$;
- г) серед обчислених значень вибрати найбільше та найменше.