

Приклади розв'язання задач

23. Які кути утворюють з віссю Ox дотичні до кривої $y = x - x^2$ у точках з абсцисами: а) $x = 0$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = 1$?

► Знаходимо похідну $y' = 1 - 2x$.

а) При $x = 0$ $y' = 1$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\alpha = 45^\circ$. ◀

► б) При $x = \frac{1}{2}$ $y' = 0$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = 0$, $\alpha = 0^\circ$. ◀

► в) При $x = 1$ $y' = -1$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = -1$, $\alpha = 135^\circ$. ◀

Результати проілюстровано на рис.3.

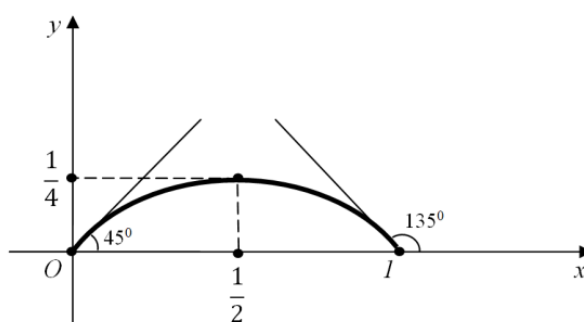


Рисунок 3

24. Написати рівняння дотичної і нормалі до параболи $y = \sqrt{x}$ у точці з абсцисою $x = 4$.

► Знаходимо похідну функції $y = \sqrt{x}$: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Звідси,

кутовий коефіцієнт дотичної $k = y'(4) = \frac{1}{4}$. Оскільки, точка дотику має координати

$x = 4$, $y = 2$, то рівняння дотичної має вигляд $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$, або $x - 4y + 4 = 0$. З умови

перпендикулярності двох прямих $k_1 \cdot k = -1$, кутовий коефіцієнт нормалі $k_1 = -4$. Звідси, рівняння нормалі

$$y - 2 = -4(x - 4) \text{ або } 4x + y - 18 = 0. \blacktriangleleft$$

25. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ у точці $M(1; -1)$.

► З рівняння кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ знаходимо похідну $y' = -\frac{x + y^2}{2xy + 6y^3}$.

$$\text{Звідси, } y'|_{(1;-1)} = -\frac{1 + (-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

Рівняння дотичної $y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1)$, або $x - 4y - 5 = 0$.

Рівняння нормалі $y + 1 = -4(x - 1)$, або $4x + y - 3 = 0$. ◀

26. Знайти кут між параболою $y = 8 - x^2$ та $y = x^2$.

► Знаходимо координати точок перетину парабол

$$\begin{cases} y = 8 - x^2, \\ y = x^2; \end{cases} \quad 8 - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Тоді $y = 4$. Отже, маємо дві точки перетину парабол: $A(2; 4)$ та $B(-2; 4)$.

Продиференціюємо рівняння парабол. З рівняння $y = 8 - x^2$ маємо $y' = -2x$, а з рівняння $y = x^2$ одержимо $y' = 2x$.

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до парабол у точці $A(2; 4)$: $k_1 = (-2x)|_{x=2} = -4$,

$$k_2 = (2x)|_{x=2} = 4. \text{ Отже, } \operatorname{tg} \varphi_1 = \left| \frac{4 + 4}{1 - 16} \right| = \frac{8}{15}, \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}.$$

Аналогічно визначається кут між кривими в точці $B(-2; 4)$: $k_1 = (-2x)|_{x=-2} = 4$,

$$k_2 = (2x)|_{x=-2} = -4. \text{ Отже, } \operatorname{tg} \varphi_2 = \left| \frac{-4 - 4}{1 - 16} \right| = \frac{8}{15}, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}. \blacktriangleleft$$

27. Залежність шляху від часу при прямолінійному русі

точки задана рівнянням $s = \frac{t^5}{5} + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{8} t$ (t — у секундах, s — у метрах). Визначити швидкість руху в кінці другої секунди.

► Знаходимо похідну від шляху по часу. Отримуємо швидкість руху

$$v = \frac{ds}{dt} = t^4 + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{8} t.$$

При $t = 2$ маємо $v|_{t=2} = 16 + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \approx 16,18$.

Отже, швидкість руху в кінці другої секунди $v \approx 16,18$ м/с. ◀

28. Тіло, кинуте вертикально вгору, рухається за законом $s(t) = -4,905t^2 + 981t + 950$ (t — у секундах, s — у метрах). Знайти: швидкість тіла в будь-який момент часу; його початкову швидкість; момент часу, при якому швидкість тіла стане рівною нулю; висоту, яку досягне тіло в цей момент часу.

► На основі механічного змісту похідної маємо $v(t) = s'(t) = -9,81t + 981$. Вважаючи $t = 0$, отримаємо початкову швидкість тіла $v_0 = s'(0) = 981$ (м/с). Визначаємо тепер, в який момент часу t швидкість тіла стане рівною нулю. Із рівняння $-9,81t + 981 = 0$ знайдемо, що

$t = 100$ с. Тоді висота, якої досягло тіло в момент часу $t = 100$ с, дорівнюватиме $s = -4,905 \cdot 100^2 + 981 \cdot 100 + 950 = 50000$ (м). Зрозуміло, що ця висота є найбільшою. ◀

29. По параболі $y = x(8 - x)$ рухається точка так, що її абсциса змінюється в залежності від часу t за законом $x = t\sqrt{t}$, (t — у секундах, x — у метрах). Яка швидкість зміни ординати у точці $M(1, 7)$?

► Знайдемо закон зміни ординати, поклавши $x = t\sqrt{t}$ у рівняння параболи $y = x(8 - x)$. Отримаємо $y = 8t\sqrt{t} - t^3$. Швидкість зміни ординати є похідна від ординати по часу: $y' = 12\sqrt{t} - 3t^2$. Для точки $M(1, 7)$ значення $t = 1$. Отже, $y'|_{t=1} = 9$, тобто швидкість зміни ординати дорівнює 9 м/с. ◀

40. Дослідити функцію $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-2}$ та побудувати її графік.

► 1. Область визначення $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. На інтервалі $(-\infty; 2)$ маємо $f(x) < 0$, на інтервалі $(2; +\infty)$ маємо $f(x) > 0$. Точки перетину з осями координат: $(-1; 0)$ та $(0; -1/2)$.

2. Функція елементарна, отже, неперервна в усіх точках своєї області визначення, тобто при всіх дійсних $x \neq 2$. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = +\infty$, то $x = 2$ є точкою розриву другого роду.

3. Вертикальна асимптота $x = 2$, бо $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$.

Похили асимптоти шукаємо у вигляді $y = kx + b$. У нас

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+1)^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+1}{x-2} = 4.$$

Отже, $y = x$ — похила асимптота.

4. Функція ні парна, ні непарна, бо область визначення не є симетричною відносно початку координат. Функція неперіодична, бо не існує такого числа $T > 0$, щоб

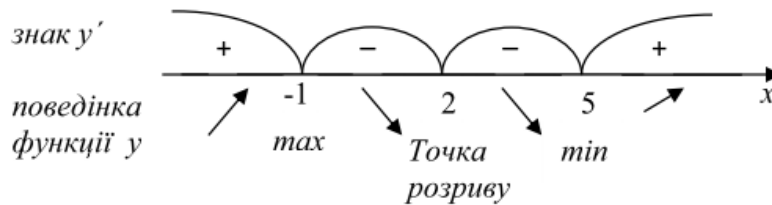
$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D(f).$$

5. Знаходимо точки екстремуму та визначаємо інтервали монотонності функції. Обчислимо похідну

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x-2) - (x+1)^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

Для визначення критичних точок розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0$, тобто $(x+1)(x-5) = 0$.

$5)=0$, $(x-2)^2 \neq 0$, звідки $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. Критичні точки $x_1 = -1$, $x_2 = 5$ та точка $x = 2$ (це точка розриву функції) поділяють область визначення функції на інтервали, які вказані на наведеній нижче схемі. На цій схемі над віссю Ox вказано знак похідної функції $y' = f'(x)$, під віссю Ox показана поведінка функції $y = f(x)$ на вказаних інтервалах. Стрілки $\nearrow, \searrow$ вказують відповідно, що функція зростає або спадає. Слова *max*, *min* вказують точки, в яких функція досягає максимуму чи мінімуму.



Отже, $y_{\max} = y(-1) = 0$, $y_{\min} = y(5) = 12$.

На проміжках $(-\infty; -1)$ і $(5; +\infty)$ функція зростає; на проміжках $(-1; 2)$ і $(2; 5)$ функція спадає.

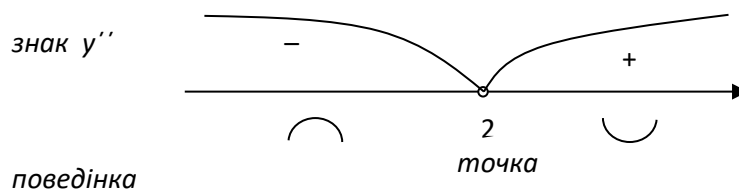
7. Знаходимо точки перегину графіка функції та визначаємо інтервали опуклості та угнутості. Обчислимо другу похідну

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2} \right)' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2 - 4x - 5)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{18}{(x-2)^3},$$

$$f''(x) \neq 0;$$

$f''(x) < 0$ на проміжку $(-\infty; 2)$ тобто крива опукла на цьому проміжку; $f''(x) > 0$ на проміжку $(2; +\infty)$, тобто крива угнута на цьому проміжку.

Точок перегину немає, бо точка $x = 2$, в околі якої змінюється знак другої похідної, є точкою розриву функції. Результати цього дослідження наведено на схемі.



Тут знак $\cap$ означає опуклість, знак $\cup$ – угнутість.

На основі дослідження поступово будуюмо графік функції $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-2}$, який наведено на рис.4. ◀

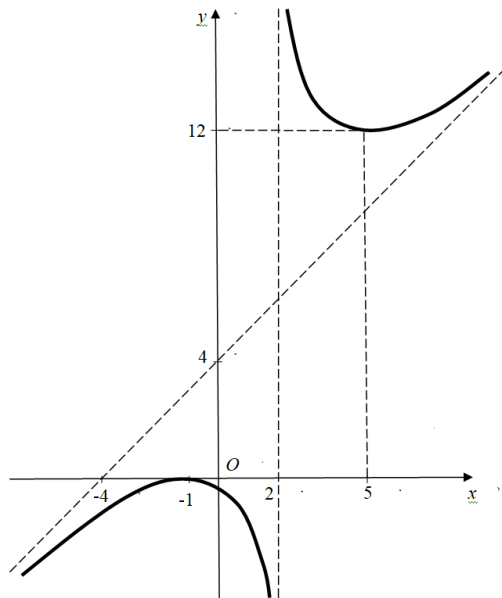


Рисунок 4

41. Дослідити функцію $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ та побудувати її графік.

► 1. Область визначення функції $D(f) = (-\infty; +\infty)$. На інтервалі $(-\infty; 0)$ маємо $f(x) < 0$, на інтервалі $(0; +\infty)$ маємо $f(x) > 0$. Графік функції перетинається з осями координат в точці $(0; 0)$.

2. Функція елементарна, отже, неперервна в усіх точках своєї області визначення, тобто на всій числовій осі. Точок розриву немає.

3. Вертикальних асимптот функція немає, бо не існує такого числа a , щоб $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Похилі асимптоти шукаємо у вигляді $y = kx + b$. Маємо

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

Отже, $y = 0$ – горизонтальна асимптота.

4. Функція є непарною, бо область визначення симетрична відносно початку координат і виконується умова $f(-x) = -xe^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -f(x)$, тому і графік симетричний відносно початку координат.

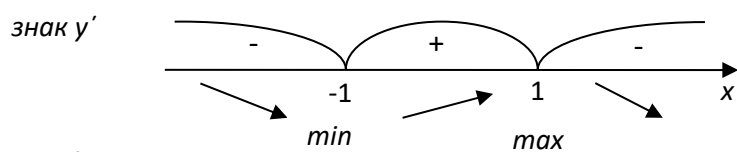
Функція неперіодична, бо не існує такого числа $T > 0$, щоб $f(x+T) = f(x) \forall x \in D(f)$.

5. Досліджуємо функцію на екстремуми та знаходимо інтервали монотонності. Знайдемо похідну

$$f'(x) = \left(x e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' = e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2);$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 1. \end{cases}$$

Отримали критичні точки, які розбивають числову вісь на три інтервали. Дослідження знаку першої похідної на цих інтервалах та висновки відносно поведінки функції на них наведено на схемі



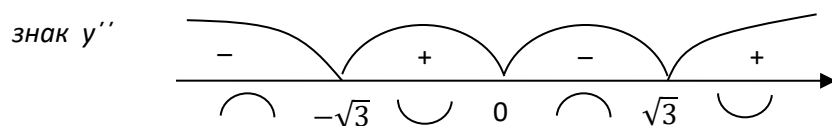
На проміжках $(-\infty; -1)$ і $(1; +\infty)$ функція спадає; а на проміжку $(-1; 1)$ вона зростає. При цьому

$$y_{\min} = y(-1) = -e^{-\frac{1}{2}} \approx -0,6, y_{\max} = y(1) = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6.$$

6. Досліджуємо функцію на опуклість, угнутість та знаходимо точки перегину. Для цього обчислимо другу похідну і знайдемо критичні точки

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2) \right)' = -x e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1 - x^2) + e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-2x) = \\ &= x e^{-\frac{x^2}{2}} (-1 + x^2 - 2) = x(x^2 - 3) e^{-\frac{x^2}{2}}; \\ f''(x) &= 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Отримали критичні точки другого роду, які розбивають числову вісь на чотири інтервали



поведінка

Функція опукла на проміжках $(-\infty; -\sqrt{3})$ і $(0; \sqrt{3})$, бо $f''(x) < 0$. Функція угнута на проміжках $(-\sqrt{3}; 0)$ і $(\sqrt{3}; +\infty)$, бо $f''(x) > 0$.

Оскільки y'' змінює знак в точках $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$, то для цих значень

абсцис маємо точки перегину.

Обчислимо значення функції в цих точках: $y(\pm\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}e^{\frac{3}{2}} \approx \pm 0,4$; $y(0) = 0$. Отже, точки перегину $P_1(-\sqrt{3}; -0,4)$, $P_2(\sqrt{3}; 0,4)$, $P_3(0; 0)$.

На основі дослідження поступово будуємо графік функції $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, який наведено на рис. 5. ◀

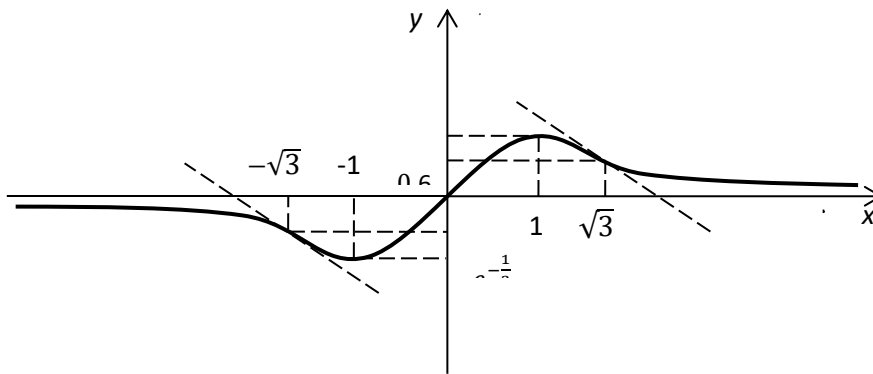


Рисунок 5

42. Дослідити та побудувати графік функції, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad a > 0.$$

► 1. Область визначення. Параметр $t \in (-\infty, +\infty)$, але, оскільки функції $\cos^3 t$, $\sin^3 t$ періодичні з періодом 2π , будемо вважати, що $t \in [0; 2\pi]$. Змінна $x \in [-a; a]$.

Область значень функції $D(y) = [-a, a]$.

Знаходимо нулі функцій $x = x(t)$, $y = y(t)$ на проміжку $t \in [0; 2\pi]$ та області знакосталості цих функцій

$$x = a \cos^3 t = 0 \Rightarrow t = \pi/2; 3\pi/2.$$

Функція $x(t)$ знакододатна на проміжках

$$[0; \pi/2] \text{ та } [3\pi/2; 2\pi].$$

$$y = a \sin^3 t = 0 \Rightarrow t = 0; \pi; 2\pi.$$

Функція $y(t)$ знакододатна на проміжку $[0; \pi]$.

2. Як елементарна задана функція неперервна. Точок розриву немає.

3. Крива не має ніяких асимптот, бо вона обмежена.

4. Симетрія кривої. З урахуванням $x(t) = x(-t)$, $y(-t) = y(t)$ маємо, що крива симетрична відносно кожної з координатних осей.

5. Знаходимо точки $t_k \in [0; 2\pi]$, в яких хоча б одна з похідних x'_t , y'_t дорівнює нулю або розривна,

$$x'_t = -3a \cos^2 t \cdot \sin t; x'_t = -3a \cos^2 t \cdot \sin t = 0 \Rightarrow t = 0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi.$$

$$y'_t = 3a \sin^2 t \cdot \cos t; y'_t = 3a \sin^2 t \cdot \cos t = 0 \Rightarrow t = 0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi.$$

$$\text{Маємо } \begin{cases} y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a \sin^2 t \cdot \cos t}{-3a \cos^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t, \\ x = a \cos^3 t. \end{cases}$$

Далі складаємо таблицю, враховуючи отримані точки та значення похідних, з якої видно, що задані параметричні рівняння визначають дві неперервні функції вигляду $y = f(x)$:

при $0 \leq t \leq \pi$ маємо $y(t) \geq 0$ (два перші рядки таблиці);

при $\pi \leq t \leq 2\pi$ маємо $y(t) \leq 0$ (два останніх рядки таблиці).

Область зміни t	Відповідна область зміни x	Відповідна область зміни y	Знак $\frac{dy}{dx}$	Характер зміни y як функції від x ($y = f(x)$)
$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	–	спадає
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	+	зростає
$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	–	спадає
$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	+	зростає

При $t = \frac{\pi}{2}$ $x = 0$, $y = a$, отже $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$.

При $t = \frac{3\pi}{2}$ $x = 0$, $y = -a$, отже $y_{\min} = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a$.

7. Знаходимо другу похідну по змінній x

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{d(-\operatorname{tg} x)}{d(a \cos^3 t)} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{3a \cos^2 t \cdot (-\sin t)} = \frac{1}{3a \cos^4 t \cdot \sin t}, \\ x = a \cos^3 t. \end{cases}$$

З'ясовуємо, що $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ при $0 < t < \pi$ – крива угнута; $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ при $\pi < t < 2\pi$ – крива опукла.

На основі дослідження будуємо криву, яка називається *астроїдою*. ◀

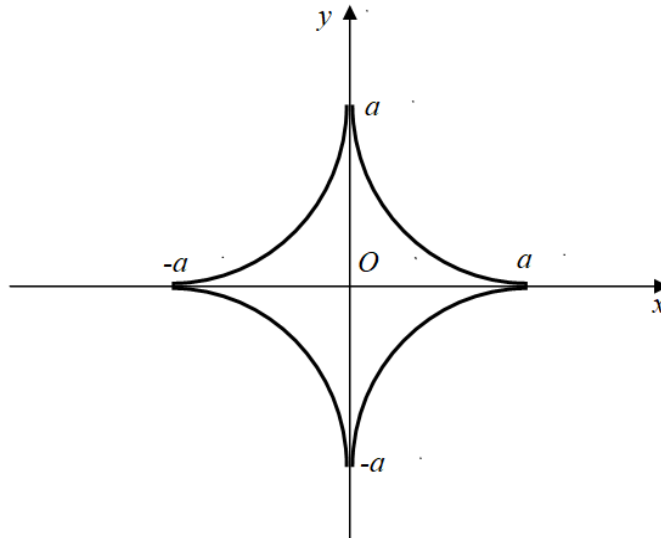


Рисунок 6

43. Дослідити та побудувати графік функції, заданої в полярних координатах рівнянням $\rho = a \sin 3\varphi$ (трипелюсткова троянда).

► 1. Періодичність (знаходження такого значення $T > 0$, що $f(\varphi + T) = f(\varphi)$).

$$\sin[3(\varphi + T)] = \sin \varphi, \quad 3(\varphi + T) = 3\varphi + 2\pi,$$

$$3(\varphi + T) = 3\varphi + 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad 3T = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{3}.$$

2. Область визначення (ті значення φ , при яких $\rho \geq 0$).

$$\sin 3\varphi \geq 0, \quad 0 \leq 3\varphi \leq \pi \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

Далі, з урахуванням періоду, маємо $\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi, \frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$.

3. Промені симетрії (такі півпрямі, що виходять з полюса, відносно яких графік функції симетричний).

Враховуючи, що для функції $\rho = \sin \varphi$ промінь симетрії $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то для функції

$\rho = a \sin 3\varphi$ маємо $3\varphi = \frac{\pi}{2}$, звідки $\varphi = \frac{\pi}{6}$ – промінь симетрії. Враховуючи періодичність,

отримаємо ще два промені:

$$\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}; \quad \varphi = \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}.$$

4. Знаходимо точки екстремумів.

$$\rho' = 3a \cos 3\varphi; \quad \rho' = 0 \Leftrightarrow \cos 3\varphi = 0, \quad \varphi = \pi/6.$$

$$\rho'' = -9a \sin 3\varphi < 0 \text{ на } (0; \pi/3), \text{ отже, } \rho_{\max} = \rho(\pi/6) = a \sin \pi/2 = a.$$

$\rho' > 0$ при $\varphi \in [0; \pi/6)$ – функція зростає;

$\rho' < 0$ при $\varphi \in (\pi/6, \pi/3]$ – функція спадає.

5. Складаємо таблицю значень функції на проміжку $[0; \pi/6]$.

φ	0	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/6$
3φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
$\sin 3\varphi$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	1
ρ	0	$a/2$	$\sqrt{2}a/2$	a

На основі дослідження будуємо графік *трипелюсткової троянди*. ◀

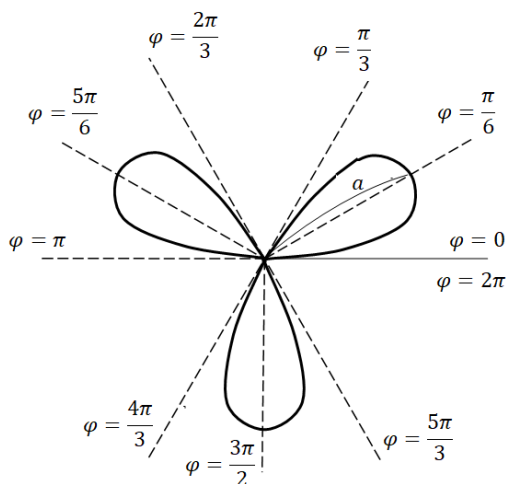


Рисунок 7

44. Знайти найбільше M та найменше m значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на відрізку $[-4; 4]$.

► Знаходимо критичні точки даної функції, що лежать всередині відрізка $[-4; 4]$ і обчислюємо значення функції в цих точках: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; $3x^2 - 6x - 9 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ – критичні точки функції, що належать заданому відрізку;

$$f(-1) = 40, \quad f(3) = 8.$$

Обчислюємо значення даної функції в точках $x = -4$, $x = 4$ – межах відрізка $[-4; 4]$:

$$f(-4) = 41, \quad f(4) = 15.$$

З отриманих чотирьох значень вибираємо найбільше та найменше. Отже, $M = f(-1) = 40$, $m = f(-4) = -41$. ◀

45. Знайти такий циліндр, який мав би найбільший об'єм при заданій повній поверхні S .

► Нехай радіус основи циліндра $R = x$, а висота $H = y$.

Тоді $S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бічн}} = 2\pi x^2 + 2\pi xy$. Звідси, $y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x}$.

Об'єм циліндра буде

$$V = V(x) = S_{\text{осн}} \cdot H = \pi x^2 \cdot \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{S}{2}x - \pi x^3.$$

Задача зводиться до дослідження функції $V(x)$ на максимум при $x > 0$. Знайдемо похідну

$$V'(x) = \frac{S}{2} - 3\pi x^2, \quad \frac{S}{2} - 3\pi x^2 = 0, \quad x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

Це критична точка. Дослідимо її на екстремум

$$V''(x) = -6\pi x, \quad V''\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) = -6\pi \sqrt{\frac{S}{6\pi}} = -\sqrt{6\pi S} < 0.$$

Значить, в точці $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ функція має максимум, тобто об'єм має найбільше значення.

Висота циліндра при цьому

$$H = y = \frac{S - 2\pi \frac{S}{6\pi}}{2\pi \sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 2x = 2R.$$

Отже, висота H циліндра дорівнює $2R$ – діаметру основи циліндра. За цієї умови циліндр має найбільший об'єм. ◀