

Завдання для самостійного розв'язання

191. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, яка проведена до параболи $y = x^2$: 1) у початку координат; 2) у точці (3,9); 3) у точці (-2,4); 4) у точках перетину її з прямою $y = 3x - 2$.

192. В яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи $y = x^3$ дорівнює 3?

193. В якій точці дотична до параболи $y = x^2$:

1) паралельна осі Ox ; 2) утворює з віссю Ox кут 45° ?

194. В яких точках дотична до параболи $y = x^2$:

1) паралельна прямій $y = 4x - 5$;

2) перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 5 = 0$;

3) утворює з прямою $3x - y + 1 = 0$ кут 45° ?

195. На лінії $y = x^2(x - 2)^2$, знайти точки в яких дотична паралельна осі абсцис.

196. На гіперболі $y = \frac{x-1}{x+1}$, знайти точки в яких дотичні паралельні прямій

$y = 2x + 1$.

197. На параболі $y = x^2$ зафіксовано дві точки з абсцисами $x_1 = 1, x_2 = 3$. Через ці точки проведено січну. В якій точці параболи дотична до неї паралельна проведеній січній?

198. Написати рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = x^3$ в точці з абсцисою 2. Знайти піддотичну s_t і піднормаль s_n .

199. Скласти рівняння дотичної та нормалі до гіперболи $y = \frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x = -\frac{1}{2}$. Знайти піддотичну s_t і піднормаль s_n .

У задачах 200 – 205 скласти рівняння дотичної та нормалі до даних ліній в даній точці.

200. $y = x^2 - 5x + 4, x_0 = -1$.

201. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3, x_0 = -2$.

202. $y = \sqrt{x}, x_0 = 4$.

203. $y = \operatorname{tg} 2x, x_0 = 0$.

204. $y = \ln x, x_0 = 1$.

205. Написати рівняння дотичної і нормалі в точці $M_0(2,2)$ до кривої, заданої

параметрично
$$\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3}, \\ y = \frac{3}{2t^3} + \frac{1}{2t}. \end{cases}$$

206. Написати рівняння дотичної до кривої $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t \end{cases}$

у початку координат і в точці $t = \pi/4$.

207. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точці з ординатою $y_0 = 3$.

208. Написати рівняння дотичної у точці $M_0(1,1)$ до кривої $x^5 + y^5 - 2xy = 0$.

209. Довести, що дотична до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M(x_0, y_0)$ має рівняння

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

210. Довести, що дотична до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M(x_0, y_0)$ має рівняння

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

211. Під яким кутом перетинається парабола $y = x^2$ прямою $3x - y - 2 = 0$?

У задачах 212 – 217 знайти кути, під якими перетинаються задані криві.

212. Параболи $y = x^2$ та $y^2 = x$.

213. Гіпербола $y = \frac{1}{x}$ з параболою $y = \sqrt{x}$.

214. Кола $x^2 + y^2 - 4x = 1$ та $x^2 + y^2 + 2y = 9$.

215. Параболи $y = (x - 2)^2$ та $y = 4x - x^2 + 4$.

216. Коло $x^2 + y^2 = 8$ та парабола $y^2 = 2x$.

217. Гіпербола $x^2 - y^2 = 5$ та еліпс $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$.

218. Відстань, пройдена матеріальною точкою за час t , визначається за формулою $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$ (t – у секундах, s – у метрах). Знайти швидкість руху даної точки у моменти часу $t = 0$; 1; 2 с.

219. Задано рівняння руху точки вздовж осі Ox $x(t) = 100 + 5t - 0,001t^3$ (t – у

секундах, s – у метрах). Знайти швидкість v та прискорення a цієї точки у моменти часу $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 10$ с.

220. Точка рухається прямолінійно, закон її руху $s = \frac{2}{9} \sin \frac{\pi t}{2} + s_0$. Знайти прискорення в кінці першої секунди (t – у секундах, s – у сантиметрах).

221. Закон руху матеріальної точки по прямій має вигляд $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

Визначити:

- а) в які моменти часу точка знаходиться у початку координат?
- б) в які моменти часу її швидкість дорівнює нулю?
- в) в які моменти часу напрямок її руху співпадає з додатним напрямом осі Ox ?
- г) в які моменти часу її прискорення дорівнює нулю?

222. Залежність шляху від часу задано рівнянням $s = t \ln(t + 1)$ (t – у секундах, s – у метрах). Знайти швидкість руху в кінці другої секунди.

223. По кубічній параболі $y = x^3$ точка рухається так, що її ордината змінюється в залежності від часу t за законом $y = at^3$. Яка швидкість зміни абсциси в залежності від часу?

У задачах 244 – 265 провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки.

244. $y = \frac{x}{1+x^2}$.

245. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

246. $y = \frac{x}{x^2-1}$.

247. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.

248. $y = \frac{(x^2-5)^3}{125}$.

249. $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$.

250. $y = \frac{x^3}{x^2-3}$.

251. $y = \frac{x}{e^x}$.

252. $y = e^{2x-x^2}$.

253. $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

254. $y = (2x-1)e^{\frac{2}{x}}$.

255. $y = \frac{1}{x \ln x}$.

256. $y = x - \ln(x+1)$.

257. $y = \ln(x^2+1)$.

258. $y = \sqrt[3]{x^2-2x}$.

259. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$.

260. $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$.

261. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$262. y^2 = x^3 + 1.$$

$$263. y^2 = x(x-1)^2.$$

$$264. y^2 = \frac{x^3 - 2}{3x}.$$

У задачах 265 – 268 дослідити функції, задані параметрично, та побудувати їх графіки.

$$265. x = t^2 - 2t, \quad y = t^2 + 2t.$$

$$266. x = t + e^{-t}, \quad y = 2t + e^{-2t}.$$

$$267. x = t^3 - 3\pi, \quad y = t^3 - 6\arctgt.$$

$$268. x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

У задачах 269 – 273 дослідити лінії, рівняння яких задані у полярних координатах, та побудувати їх.

$$269. \rho = a \cos 3\varphi \text{ (трипелюсткова троянда).}$$

$$270. \text{ а) } \rho = 3 \sin 2\varphi \text{ (чотирипелюсткова троянда);}$$

$$\text{ б) } \rho = 3 \cos 2\varphi \text{ (чотирипелюсткова троянда).}$$

$$271. \rho = a \sqrt{\cos 2\varphi} \text{ (лемніската Бернуллі).}$$

$$272. \rho = a(1 + \cos \varphi) \text{ (кардіоида).}$$

$$273. \rho = \sqrt{\pi / \varphi} \text{ (жезл).}$$

У задачах 274 – 275 дослідити та побудувати лінії, попередньо звівши їх рівняння до полярних координат.

$$274. (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

$$275. (x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2.$$

У задачах 276 – 281 знайти найбільше M та найменше m значення функцій на вказаних відрізках.

$$276. y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2, 2]. \quad 277. y = \sqrt{100 - x^2}, [-6, 8].$$

$$278. y = \frac{x-1}{x+1}, [0, 4]. \quad 279. y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}, [0, 1].$$

$$280. y = \sin 2x - x, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad 281. y = \arctg \frac{1-x}{1+x}, [0, 1].$$

282. Число 8 розбити на два таких доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.

283. Яке додатне число, складене з оберненим йому числом, дає найменшу суму?

284. Число 36 розкласти на два таких множники, щоб сума їх квадратів була найменшою.

285. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V . Якою повинна бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?

286. Периметр осевого перерізу циліндра дорівнює $6a$. Знайти найбільший об'єм такого циліндра.

287. Циліндр вписаний в конус з висотою h і радіусом основи r . Знайти найбільший об'єм вписаного циліндра.

288. Знайти найменший об'єм конуса, описаного навколо кулі радіуса r .

289. Знайти найбільший об'єм конуса при заданій довжині l його твірної.

290. Визначити найбільшу площу прямокутника, вписаного в круг радіуса r .

291. На параболі $y = x^2$ знайти точку N , яка найменш віддалена від прямої $y = 2x - 4$.

292. У півколі радіуса R вписано прямокутник з найбільшою площею. Визначити його сторони.

293. Відрізок довжиною a розділили на дві частини так, що сума площ квадратів, побудованих на цих частинах, була найменшою.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

191. 1) 0; 2) 6; 3) -4 ; 4) $k = 2$, $k = 4$.

192. (1; 1), $(-1; -1)$.

193. 1) $(0; 0)$, 2) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

194. 1) $(2, 4)$, 2) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$, $(-1; 1)$.

195. $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 0)$. **196.** $(-2; 3)$, $(0; -1)$. **197.** $(2, 4)$.

198. $12x - y - 16 = 0$; $x + 12y - 98 = 0$; $s_t = \frac{2}{3}$; $s_n = 96$.

199. $4x + y + 4 = 0$; $2x - 8y - 15 = 0$; $s_t = \frac{1}{2}$; $s_n = 8$.

200. $7x + y - 3 = 0$; $x - 7y + 71 = 0$.

201. $y - 5 = 0$; $x + 2 = 0$.

202. $x - 4y + 7 = 0$; $4x + y - 18 = 0$.

203. $2x - y = 0$; $x + 2y = 0$.

204. $x - y - 1 = 0$; $x + y - 1 = 0$.

205. $7x - 10y + 6 = 0$; $10x + 7y - 34 = 0$.

206. $y = 0$; $(\pi + 4)x + (\pi - 4)y - \pi^2 \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$.

207. $5x + 6y - 13 = 0; 6x - 5y + 21 = 0.$

208. $x + y - 2 = 0.$

211. $\alpha_1 = \arctg \frac{1}{7}; \alpha_2 = \arctg \frac{1}{13}.$

212. $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}; \alpha_2 = \arctg \frac{3}{4}.$

213. $\arctg 3.$ 214. $45^\circ.$ 215. $\arctg \frac{8}{15}.$

216. $\arctg 3.$ 217. $90^\circ.$ 218. $2 \text{ м/с}; 2 \text{ м/с}; 6 \text{ м/с}.$

219. $v=5; 4,997; 4,7 \text{ м/с}; a=0; -0,006; -0,06 \text{ м/с}^2.$

220. $a = -\frac{\pi^2}{18} \text{ см/с}^2.$

221. а) $t_1 = 0; t_2 = 8;$ б) $t_1 = 0; t_2 = 4; t_3 = 8;$

в) $t \in (0, 4) \cup (8, +\infty);$ г) $t_1 = \frac{4}{3}(3 + \sqrt{3}), t_2 = \frac{4}{3}(3 - \sqrt{3}).$

222. $1,76 \text{ м/с}.$ 223. $x'_t = \sqrt[3]{a}.$

244. $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{2}, y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{2};$ точки перегибу $P_1(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}), P_2(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}),$

$P_3(0; 0);$ асимптота $y = 0.$

245. $y_{\min} = y(0) = 1;$ точок перегибу немає; асимптоти $x = \pm 1, y = 0.$

246. Екстремумів немає; точка перегибу $P(0; 0);$ асимптоти $x = \pm 1, y = 0.$

247. $y_{\max} = y(0) = 0;$ точок перегибу немає; асимптоти $x = \pm 1, y = 1.$

248. $y_{\min} = y(0) = -1;$ точки перегибу $(\pm 1; -\frac{64}{125}), (\pm \sqrt{5}; 0).$

249. $y_{\min} = y(3) = \frac{27}{e};$ точка перегибу $(0; 0); x = 1, y = \frac{1}{2}x + 1.$

250. $y_{\max} = y(-3) = -4,5, y_{\min} = y(3) = 4,5;$ точка перегибу $(0; 0);$ асимптоти $x = \pm \sqrt{3}, y = x.$

251. $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{e};$ точка перегибу $(2; \frac{2}{e^2});$ асимптота $y = 0.$ 252. $y_{\max} = y(1) = e;$ точки

перегибу $(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}; \sqrt{e});$ асимптота $y = 0.$

253. $y_{\min} = y(1) = e;$ точок перегибу немає; асимптоти $y = x + 1, x = 0.$

254. Точка перегибу $(1; e^2);$ асимптоти $y = 2x + 3, x = 0.$

255. $y_{\max} = y\left(\frac{1}{e}\right) = -e$; асимптоти $x=1$, $x=0$, $y=0$ (права асимптота).

256. $y_{\min} = y(0) = 0$; точок перегину немає; асимптота $x=-1$. 257. $y_{\min} = y(0) = 0$; точки перегину $(\pm 1; \ln 2)$.

258. $y_{\min} = y(1) = -1$; точки перегину $(0;0)$, $(2;0)$.

259. Точки перегину $(0;1)$, $(1;0)$; асимптота $y = -x$.

260. Точки перегину $(0;0)$, $(\pm 1; \pm \sqrt[3]{2})$; асимптота $y = x$.

261. Точка перегину $(0;0)$; асимптоти $y = -1$ (ліва), $y = 1$ (права).

262. Визначена при $x \geq -1$, двозначна; екстремумів немає; графік симетричний відносно осі Ox ; точки перегину $(0;1)$, $(0;-1)$; асимптот немає.

263. Визначена при $x \geq 0$, двозначна; графік симетричний відносно осі Ox ;

$|y|_{\max} = |y\left(\frac{1}{3}\right)| = \frac{2\sqrt{\pi}}{9}$; точок перегину немає; асимптот немає.

264. Визначена при $x < 0$ та при $x \geq \pm \sqrt[3]{2}$; двозначна; графік симетричний відносно осі

Ox ; $|y|_{\max} = |y(-1)| = 1$; точок перегину немає; асимптоти $x=0$, $y = \pm \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

265. $x_{\min} = -1$ при $t=1$ ($y(1)=3$), $y_{\min} = -1$ при $t=-1$ ($x(-1)=3$); парабола з вершиною у початку координат, вісь якої – пряма $y = x$ ($x > 0, y > 0$).

266. $x_{\min} = y_{\min} = 1$ при $t=0$ (точка звороту), $y = 2x$ – асимптота при $t \rightarrow \infty$.

267. $(-1-3\pi; -1+\frac{3\pi}{2})$ – максимум, $(1-3\pi; 1-\frac{3\pi}{2})$ – мінімум; точка перегину $(-3\pi; 0)$;

асимптоти $y = x$, $y = x + 6\pi$.

268. Асимптота $x + y + 1 = 0$; $(0;0)$ – точка самоперетину, дотичними в цій точці є осі координат; точок перегину немає; у першому квадранті – замкнена петля.

269. Замкнена трипелюсткова троянда; $D(\rho) = \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$; екстремуми

при $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ (достатньо дослідити лінію при $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi < \frac{\pi}{6}$).

270. а) Екстремуми при $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$

(достатньо дослідити лінію при $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$);

б) графік отримується з графіка $\rho = 3\sin 2\varphi$ за допомогою повороту на кут $-\frac{\pi}{4}$.

271. $D(\rho) = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$; екстремуми при $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ (достатньо дослідити лінію при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$).

272. Кардіоида, полюс – точка звороту; $\rho_{\max} = \rho(0) = 2a$, $\rho_{\min} = \rho(\pi) = 0$.

273. $D(\rho) = (0; +\infty)$; лінія спіралью завивається навколо полюса, асимптотично до нього наближаючись; точка перегину $(\sqrt{2\pi}; \frac{1}{2})$; горизонтальна асимптота – полярна вісь ($\varphi = 0$).

274. Лемніската Бернуллі (див. № 271).

275. Чотирипелюсткова троянда (див. №270 а).

276. $M = 13$, $m = 4$. 277. $M = 10$, $m = 6$.

278. $M = \frac{3}{5}$, $m = -1$. 279. $M = 1$, $m = \frac{3}{5}$.

280. $M = \frac{\pi}{2}$, $m = -\frac{\pi}{2}$. 281. $M = \frac{\pi}{4}$, $m = 0$.

282. 4 та 4. 283. 1. 284. 6 та 6. 285. $\sqrt[3]{4V}$.

286. πa^3 . 287. $\frac{4}{27}\pi r^2 h$. 288. $\frac{8}{3}\pi r^3$.

289. $\frac{2}{9\sqrt{3}}\pi e^3$. 290. $2r^2$. 291. $N(1;1)$.

292. $x = R\sqrt{2}$, $y = \frac{R}{\sqrt{2}}$. 293. Розділити відрізок навпіл.