

§1. Числові ряди

1.1 Числові ряди. Сума і збіжність числового ряду. Необхідна умова збіжності.

Критерій Коші збіжності ряду

Вираз $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $\{a_n\}$ – задана числова послідовність, називається **числовим рядом**. При цьому числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ називають членами ряду. Для задавання ряду необхідно знати правило, яке б давало можливість кожному номеру n поставити у відповідність $a_n = f(n)$; аналітичний вираз такої функції називають *загальним* членом ряду.

Сума n перших членів ряду

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

називається n -ю *частинною сумою* цього ряду.

Якщо існує скінченна границя послідовності $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ частинних сум ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд називається **збіжним**, а число S – *сумою* ряду. Якщо послідовність частинних сум границі не має або дорівнює нескінченності, то ряд називається **розбіжним**.

Різниця між сумою ряду S і його n -ю частинною сумою S_n називається n -м *залишком* ряду:

$$r_n = S - S_n.$$

Необхідна ознака збіжності числового ряду. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Достатня ознака розбіжності ряду. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ або не існує, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Властивості збіжних рядів:

1. Нехай c – деяке число. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, який називається *добутком* даного ряду на число c , також збігається і

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, який називається *сумою* даних рядів, також збігається і

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

3. Якщо ряд збігається, то будь-який його залишок збігається. Якщо будь-який залишок ряду збігається, то і сам ряд також збігається. При цьому якщо $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_m = \sum_{n=1}^m a_n$, $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$, то

$$S = S_m + r_m.$$

Критерій Коші. Для того, щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігався, необхідно і достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$

існувало число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N$ і будь-якого натурального p виконувалась нерівність

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

1.2 Ознаки збіжності рядів з додатними членами

Ознака порівняння. Якщо $0 \leq a_n \leq b_n$, починаючи з деякого $n = N$, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

також збіжний, а якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ознака порівняння в граничній формі. Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ знакододатні, причому існує

скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q \neq 0$, то ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Для застосування ознак порівняння потрібно мати набір еталонних рядів з наперед відомим поведінням. Такими є:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \neq 0$ – $\begin{cases} \text{збіжний при } |q| < 1, \\ \text{розбіжний при } |q| \geq 1; \end{cases}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ – $\begin{cases} \text{збіжний при } \alpha > 1, \\ \text{розбіжний при } \alpha \leq 1. \end{cases}$

Перший з цих рядів, як відомо, називається геометричною прогресією. Другий з рядів називається *рядом Діріхле* або *узагальненим гармонічним рядом*. Його ми дослідимо пізніше. Зокрема, при $\alpha = 1$ дістанемо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який розбігається.

Ознака Даламбера. Нехай задано ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тоді:

- 1) якщо існує таке число q , $0 < q < 1$, і такий номер N , що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \quad \text{то заданий ряд збігається;}$$

- 2) якщо існує такий номер N , що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то заданий ряд

розбігається.

Ознака Даламбера у граничній формі. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$,

то цей ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$. Зауважимо, що у випадку $l = 1$ про числовий ряд нічого сказати не можна.

На практиці зручніше користуватись ознакою Даламбера у граничній формі, яка є дещо слабшою за ознаку Даламбера.

Ознака Коші. Нехай задано ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тоді:

- 1) якщо існує таке число q , $0 < q < 1$, і такий номер N , що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність

$\sqrt[n]{a_n} \leq q$, то заданий ряд збігається;

2) якщо існує такий номер N , що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то заданий ряд розбігається.

Ознака Коші в граничній формі. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то цей ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.

Інтегральна ознака Коші. Нехай для числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ виконується $a_n = f(n) > 0$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. Якщо функція $f(x)$ неперервна, монотонно незростаюча на деякому проміжку $[a, +\infty)$ ($a \geq 1$), то ряд і невластний інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

1.3 Числові ряди з довільними членами

Для числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

з довільними членами розглянемо ряд, складений з абсолютних величин членів цього ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (2)$$

Виявляється, що із збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1). Зворотне твердження, взагалі кажучи, не вірне. У зв'язку з цим дамо такі означення.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд з модулів членів цього ряду, тобто збігається $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **умовно збіжним**, якщо він збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається.

Ряд називається **знакопереміжним**, якщо в ньому після кожного додатного члена йде від'ємний і після кожного від'ємного члена – додатний. Знакопереміжні ряди записують у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ або $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$, де усі $u_n > 0$.

Ознака Лейбніца. Якщо члени знакопереміжного ряду монотонно не зростають за абсолютною величиною і прямують до нуля при $n \rightarrow \infty$, то ряд збігається. При цьому його сума має той же знак що і перший член ряду, а за модулем вона не перевищує абсолютної величини цього члена.

Ряд, для якого виконуються умови ознаки Лейбніца, називається **рядом лейбніцевого типу**.

1.4 Наближене обчислення суми ряду

При наближеному обчисленні суми ряду покладають, що $S \approx S_n$, де $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ – n -а частинна сума ряду. При такому наближенні допускається похибка, що дорівнює залишку ряду, тобто

$$r_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

Таким чином, оцінка точності наближення зводиться до оцінки залишку ряду. Наведемо деякі такі оцінки:

– для ряду лейбніцевого типу

$$|r_n| \leq |a_{n+1}|,$$

тобто абсолютна величина точності наближення $S \approx S_n$ не перевищує першого з відкинутих членів;

– для збіжного знакододатного ряду, члени якого $a_n = f(n)$ монотонно спадають, починаючи з $(n+1)$ -го,

$$r_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx;$$

– для збіжного знакододатного ряду замінюють залишок ряду залишком з дещо більших членів, сума яких може бути знайдена.