

## Приклади розв'язання задач

1. Знайти чотири перші і  $(n+1)$ -й члени ряду за формулою загального члена:

$$\text{а) } a_n = \frac{2^n}{n!}; \quad \text{б) } a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

► Щоб знайти певний член ряду, треба у формулу загального члена ряду  $a_n$  підставити номер цього члена.

$$\text{а) Нагадаємо, що } n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n, & \text{якщо } n \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{якщо } n = 0. \end{cases} \quad a_1 = \frac{2}{1!} = 2,$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2!} = \frac{2^2}{1 \cdot 2} = 2, \quad a_3 = \frac{2^3}{3!} = \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4}{3}, \quad a_4 = \frac{2^4}{4!} = \frac{2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}. \blacktriangleleft$$

$$\text{► б) } a_1 = \frac{(-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = -1, \quad a_2 = \frac{(-1)^2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{(-1)^3}{2 \cdot 3 - 1} = -\frac{1}{5}, \quad a_4 = \frac{(-1)^4}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{1}{7},$$

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot (n+1) - 1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}. \blacktriangleleft$$

2. Написати, по можливості найпростішу, формулу загального члена рядів:

$$\text{а) } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots; \quad \text{б) } \frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots$$

► а) Даний ряд можна записати у вигляді  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ , звідки бачимо, що

$$a_n = \frac{1}{n^2} \text{ — найпростіша формула загального члена ряду. } \blacktriangleleft$$

► б) У чисельники записані парні числа  $2n$ , знаменники утворюють *арифметичну прогресію*, з першим членом, рівним 5,  $d = 3$ , отже,  $n$ -ий член дорівнює  $3n + 2$ . Тому найпростіший вигляд загального члена ряду буде  $a_n = \frac{2n}{3n+2}$ .  $\blacktriangleleft$

3. Користуючись означенням, довести збіжність ряду і знайти його суму:

$$\text{а) } \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \text{ (ряд називають сумою нескінченної геометричної прогресії).}$$

► а) Загальний член ряду  $a_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ . Маємо правильний раціональний дріб.

Розкладемо його на суму елементарних дробів

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} \Rightarrow A(2n+1) + B(2n-1) = 2,$$

$$\begin{aligned} \text{при } n: \quad 2A + 2B &= 0, \\ \text{при } n^0: \quad A - B &= 2, \end{aligned} \Rightarrow A = 1, \quad B = -1.$$

Отже,  $a_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$ . Тоді

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Легко знаходимо  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ . Тому ряд збігається і його сума дорівнює 1. ◀

► б) Очевидно, при  $a = 0$  ряд збігається і його сума  $S = 0$ .

Нехай  $a \neq 0$ . Розглянемо такі випадки:

1)  $q = 1$ ; тоді  $S_n = a + a + \dots + a = n \cdot a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , отже, ряд розбігається.

2)  $q = -1$ ; тоді  $S_1 = a$ ,  $S_2 = a - a = 0$ ,  $S_3 = a - a + a = a$  і т.д.

Утворена послідовність не прямує ні до якого числа, тобто вона границі не має. Тому ряд також розбігається.

$$3) |q| \neq 1, \quad S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Якщо  $|q| < 1$ , то  $q^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , тому існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$ . Отже, ряд збіжний і

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

Якщо  $|q| > 1$ , то  $q^n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ . Це означає, що ряд розбігається.

Ми отримали, що ряд, члени якого складають нескінченну геометричну прогресію з першим членом  $a$  і знаменником  $q$ , збігається при  $|q| < 1$  і його сума дорівнює  $\frac{a}{1 - q}$  і розбігається при  $|q| \geq 1$ ,  $a \neq 0$ . ◀

4. Чи виконується необхідна умова збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+4}$  ?

► Границя загального члена ряду  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2}{3} \neq 0$ , отже, ряд розбігається.

◀

5. Довести, що *гармонічний* ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  розбігається, хоча загальний член ряду прямує

до нуля при  $n \rightarrow \infty$ .

► Розглянемо різницю частинних сум з номерами  $2n$  і  $n$ :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ця нерівність означає, що при  $p = n$  для гармонічного ряду не виконується критерій Коші, тому ряд розбігається. ◀

6. Дослідити на збіжність ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^{n-1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}.$$

► Очевидно, обидва ряди є з додатними членами.

а) Порівняємо загальний член  $a_n = \frac{1}{n3^{n-1}}$  цього ряду із загальним членом  $b_n = \frac{1}{3^{n-1}}$

геометричної прогресії  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} \left( q = \frac{1}{3} < 1 \right)$ . Оскільки члени заданого ряду не перевищують

членів збіжної геометричної прогресії  $\frac{1}{n3^{n-1}} \leq \frac{1}{3^{n-1}}$ , то за ознакою порівняння ряд збігається. ◀

► б) Порівняння з гармонічним рядом за звичайною ознакою порівняння нічого не дає, бо  $\frac{1}{n + \ln n} < \frac{1}{n}$  і ніякого висновку про збіжність заданого ряду не можемо зробити.

Скористаємось ознакою порівняння в граничній формі з тим же гармонічним рядом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n + \ln n)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1/n} = 1 \neq 0.$$

Отже, порівнювані ряди, заданий і гармонічний, в питанні збіжності, поведуться однаково. Але гармонічний ряд розбіжний, тому розбігається і заданий в умові ряд.

Зауважимо, що для знаходження останньої границі ми використали правило Лопітала (замінюючи дискретну змінну  $n$  на неперервну  $x$ ). ◀

7. Використовуючи ознаку Даламбера у граничній формі, дослідити на збіжність такі ряди:

$$\text{а) } \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{2^2}{2^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{n^n}{2^n \cdot n!} + \dots; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}.$$

► а) Тут  $a_n = \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$ ,  $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$ , отже,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{2^n \cdot 2 \cdot n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n =$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n, \text{ звідки } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{2} > 1. \text{ Тому ряд розбіжний. } \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{ б) Тут } a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad a_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} =$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot (n!)^2 \cdot (2n)!}{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1) \cdot (2n+2)}.$$

$$\text{Тому } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1) \cdot (2n+2)} = \frac{1}{4} < 1, \text{ тобто ряд збіжний. } \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{ в) Тут } a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)},$$

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5) \cdot (2n+7)} = a_n \frac{(3n+1)}{(2n+7)},$$

$$\text{отже, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+7} = \frac{3}{2} > 1. \text{ Тому ряд розбіжний.}$$

$\blacktriangleright$  г) Символ  $k!!$  означає добуток усіх натуральних чисел, що не перевищують  $k$  і мають із ним однакову парність. Тому

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1) = (2n+1) \cdot (2n-1)!!.$$

$$\text{У нас } a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} = \frac{(2n+1)(2n-1)!!}{(n+1)n!} = \frac{(2n+1)}{(n+1)} a_n. \text{ Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 > 1,$$

отже, ряд розбіжний.  $\blacktriangleleft$

**8.** Дослідити збіжність ряду  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} +$

$+ \dots + \frac{1}{2^k \cdot 3^k} + \frac{1}{2^{k+1} \cdot 3^k} + \frac{1}{2^{k+1} \cdot 3^{k+1}} + \dots$  за допомогою ознаки Даламбера.

$\blacktriangleright$  Для даного ряду

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{якщо } n \text{ не парне,} \\ \frac{1}{3}, & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

Отже, відношення  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  для всіх номерів не перевищує  $q = \frac{1}{2} < 1$ , тому ряд збіжний.

Зауважимо, що в цьому прикладі ми не можемо скористатись ознакою Даламбера у граничній формі, тому що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  не існує. ◀

**9.** Використовуючи ознаку Коші в граничній формі, дослідити на збіжність такі ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{5n+2} \right)^{2n-1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \arcsin \frac{1}{n} \right)^n.$$

► а) Маємо  $a_n = \left( \frac{2n+1}{5n+2} \right)^{2n-1}$ , тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{5n+2} \right)^{2-\frac{1}{n}} = \left( \frac{2}{5} \right)^2 = \frac{4}{25} < 1, \text{ отже, ряд збіжний. } \blacktriangleleft$$

► б) Маємо  $a_n = \frac{1}{2^n} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$ , тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{2} > 1. \text{ Ряд розбіжний. } \blacktriangleleft$$

► в) Маємо  $a_n = n \left( \arcsin \frac{1}{n} \right)^n$ , тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \arcsin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} \arcsin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} \arcsin \frac{1}{n} = 0 < 1. \text{ Ряд збіжний. } \blacktriangleleft$$

**10.** Впевнитися в тому, що ознака збіжності Даламбера не вирішує питання про збіжність ряду

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \dots,$$

в той час як з допомогою ознаки Коші можна встановити, що цей ряд збіжний.

► Загальний член ряду  $a_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{при парному } n, \\ \frac{1}{2^n} & \text{при непарному } n. \end{cases}$

$$\text{Тому } \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1 & \text{при парному } n, \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1 & \text{при непарному } n. \end{cases}$$

Отже, заданий в умові ряд збіжний.

Легко бачити, що відношення

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^n & \text{при парному } n, \\ \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} \right)^n & \text{при непарному } n \end{cases}$$

весь час «перестрибує» через одиницю, тобто ознакою Даламбера тут користуватися не можна. ◀

**11.** Використовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідити на збіжність такі ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}; \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

► а) 1. Якщо  $p < 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ , тобто не виконується необхідна умова

збіжності; ряд розбігається.

2. Якщо  $0 \leq p < 1$ , то, взявши за  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ , знаходимо

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \bigg|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right) = \infty, \text{ тобто інтеграл } \int_1^{\infty} f(x) dx,$$

а, отже, і ряд, розбігається.

3. При  $p = 1$  ряд перетворюється в звичайний гармонічний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , що розбігається.

В цьому можна було б переконатись також за інтегральною ознакою:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty, \text{ тобто інтеграл розбіжний; тому розбіжний і ряд.}$$

$$4. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \text{збіжний при усіх } p > 1; \text{ тому і ряд збіжний.}$$

Отже, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  збіжний при  $1 < p < \infty$  і розбіжний при  $p \leq 1$ . Узагальнений

гармонічний ряд часто використовують при дослідженні на збіжність рядів за порівняльною ознакою. Ми відноситимемо його до “еталонних” рядів. ◀

► б) Візьмемо функцію  $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ ,  $x \in [2; +\infty)$ . Вона, очевидно, задовольняє усім

умовам інтегральної ознаки Коші. Розглянемо невластний інтеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\ln x} \right) \bigg|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Цей інтеграл збіжний, тому і даний ряд збіжний. ◀

12. Довести, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = 0$ .

► Розглянемо числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$  з загальним членом  $a_n = \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$ , який

дослідимо на збіжність за ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)!} : \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{3^n \cdot 3 \cdot (n+1)!} \cdot \frac{3^n \cdot n!}{n^n} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{3} < 1, \end{aligned}$$

тому ряд збіжний. Тоді за необхідною ознакою збіжності його загальний член прямує до

нуля, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = 0$ , що й треба було довести.

При дослідженні на збіжність рядів слід мати на увазі, що до одного і того ж ряду можна застосовувати різні достатні ознаки збіжності. Зрозуміло, вибирають найзручнішу ознаку для заданого ряду. ◀

13. Встановити, які ряди збігаються абсолютно, умовно чи розбігаються:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3n+1}$ .

► а) Складемо ряд з абсолютних величин членів даного ряду:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n!}$ . Його

загальний член  $a_n = \frac{|\sin n|}{n!} \leq \frac{1}{n!} = b_n$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  збігається за ознакою Даламбера у граничній формі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Тоді, відповідно до ознаки порівняння, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n!}$  також збігається. Отже, вихідний ряд збігається абсолютно. ◀

► б) Легко бачити, що  $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , і  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , тобто виконуються умови ознаки Лейбніца. Тому заданий ряд збігається. Ряд з абсолютних величин членів цього ряду є гармонічний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , який, як відомо, розбігається. Отже, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  збігається умовно. ◀

► в) Для загального члена даного ряду  $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{3n+1}$  маємо

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0$ , тобто не виконується необхідна умова збіжності. Тому наш ряд розбіжний. ◀

14. Обчислити суми заданих рядів з точністю 0,01:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

► а) Заданий ряд збіжний, як ряд лейбніцевого типу. Тоді  $|r_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!}$ .

Щоб  $r_n \leq 0,01$ , досить покласти  $n = 4$ . Отже, з точністю до  $|a_{n+1}| = \frac{1}{5!} < 0,01$ , маємо

$$S \approx 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} \approx 0,63. \quad \blacktriangleleft$$

► б) Члени ряду є значеннями функції  $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^4}$  при  $x = n$ . Ця функція

монотонно спадає, тому можна скористатися оцінкою

$$r_n \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)^4} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_n^b \frac{dx}{(2x-1)^4} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{-3}}{-3} \Big|_n^b = \frac{1}{6(2n-1)^3}.$$

Щоб  $r_n \leq 0,01$ , достатньо покласти  $n = 2$ . Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \approx 1 + \frac{1}{81} \approx 1,01. \quad \blacktriangleleft$$

► в) Оцінимо залишок ряду

$$\begin{aligned} r_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \frac{1}{(n+1)!} \times \\ &\times \left( 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) < \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1) \cdot (n+1)!}. \end{aligned}$$

Потрібну кількість  $n$  доданків частинної суми знаходимо з нерівності

$$\frac{n+2}{(n+1) \cdot (n+1)!} \leq 0,01.$$

Методом підбору знаходимо, що  $n = 4$ . Отже, з точністю до 0,01, маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \approx 1,71. \quad \blacktriangleleft$$