

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти чотири перші і $(n+1)$ -й члени ряду за формулою загального члена:

$$\text{а) } a_n = \frac{2n-3}{n^2+1}; \quad \text{б) } a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}.$$

2. Написати, по можливості найпростішу, формулу загального члена ряду:

$$\text{а) } \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \dots; \quad \text{б) } 1-1+1-1+1-1+\dots$$

3. Користуючись означенням, довести збіжність ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{4n^2-9}$ і знайти його суму.

4. Чи виконується необхідна умова збіжності для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^2-1}$?

5. Користуючись критерієм Коші довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$.

6. Використовуючи ознаки порівняння, дослідити на збіжність такі ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 n}{n^3+3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n-1}.$$

7. Використовуючи ознаку Даламбера у граничній формі, дослідити на збіжність числові ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{5^n \cdot n!};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!}.$$

8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ за допомогою ознаки Даламбера (Вказівка.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e).$$

9. Використовуючи ознаку Коші у граничній формі, дослідити на збіжність числові ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{3n+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{n^2};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{n}{5^n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}.$$

10. Використовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідити на збіжність числові ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Покажемо, як можна використати ряди при дослідженні деяких границь.

Припустимо, нам треба довести, що границя $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Розглянемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Якщо цей ряд збіжний, то за необхідною ознакою його загальний член має прямувати до нуля при $n \rightarrow \infty$. Це і доводить, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

11. Дослідити на збіжність ряди

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2} \right)^{\frac{n}{2}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$.

12. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n)!}{2^{n^2}} = 0$.

13. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність наступні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+2}{5n+1} \right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{5n+2}$.

14. Обчислити суми заданих рядів з точністю 0,01:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{4^n (2n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. а) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{5}{17} + \dots$; $a_{n+1} = \frac{2n-1}{n^2+2n+2}$;

б) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \dots$; $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}}$.

2. а) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$; **б)** $a_n = (-1)^{n-1}$. **3.** $\frac{23}{45}$. **4.** Ні.

6. а) збігається; **б)** розбігається; **в)** збігається; **г)** збігається.

7. а) розбігається; **б)** розбігається; **в)** збігається; **г)** збігається.

8. Розбігається.

9. а) збігається; **б)** розбігається; **в)** збігається; **г)** збігається.

10. а) розбігається; **б)** розбігається.

11. а) збігається; **б)** розбігається; **в)** збігається;
г) збігається; **д)** збігається.

13. а) збігається абсолютно; **б)** збігається умовно;
в) розбігається.

14. а) 0,06; **б)** 0,02; **в)** 0,69.