

§2. Функціональні ряди

2.1 Функціональні ряди. Рівномірна збіжність

Ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, членами якого є функції аргумента x , визначені на деякій множині E , називається **функціональним**. Якщо підставляти в ряд різні числові значення $x_0 \in E$, то одержуватимемо числові ряди, які можуть збігатись або розбігатись.

Множина D усіх значень x , для яких функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається, називається **областю збіжності функціонального ряду**. Очевидно, $D \subset E$.

Може трапитись, що для деяких $x \in D_1 \subset D$ функціональний ряд збігається абсолютно, а для деяких $x \in D_2 \subset D$ – умовно. Тому розрізняють також області абсолютної збіжності D_1 і умовної збіжності D_2 .

Для знаходження областей збіжності функціональних рядів можна використовувати табличні ряди і достатні ознаки збіжності числових рядів.

Збіжний в області D функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається **рівномірно збіжним** в цій області до функції $S(x)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий незалежний від x номер $N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ одночасно для усіх $x \in D$.

Ознака Вейєрштрасса. Якщо члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині D за абсолютною величиною не перевищують відповідних членів збіжного знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$, (тобто $|u_n(x)| \leq C_n$ для усіх $x \in D$), то на множині D функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно.

Числовий ряд, що має щодо функціонального ряду вказану властивість, називається **мажоруючим** числовим рядом.

Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів:

1. Якщо всі члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ неперервні на $[a; b]$ і ряд збігається рівномірно на $[a; b]$, то його сума $S(x)$ також неперервна на $[a; b]$.

2. Якщо члени функціонального ряду неперервні на $[a; b]$ і ряд збігається рівномірно на $[a; b]$, то цей ряд можна почленно інтегрувати в межах від x_0 до x для будь-яких $x_0, x \in [a; b]$, тобто

$$\int_{x_0}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(x) dx.$$

При цьому отриманий ряд збігається рівномірно по x на $[a; b]$ при будь-якому $x_0 \in [a; b]$.

3. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ з неперервно диференційовними членами збігається до функції $S(x)$ на $[a; b]$, а ряд похідних $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ збігається рівномірно до функції $\sigma(x)$ на $[a; b]$, то сума $S(x)$ ряду диференційовна на

цьому відрізку і всюди на ньому виконується рівність $S'(x) = \sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, тобто ряд можна почленно диференціювати.

2.2 Степеневі ряди

Степеневим рядом називається функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (4)$$

або, загальніше, виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \dots + c_n (x - x_0)^n + \dots, \quad (5)$$

де $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ – дійсні числа, які називаються *коефіцієнтами* ряду.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ збіжний при $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x , що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$. Якщо при $x = x_1$ ряд розбіжний, то він розбіжний всюди, де $|x| > |x_1|$.

З теореми Абеля випливає існування такого числа R ($0 \leq R \leq \infty$), що ряд (4) збігається, причому абсолютно, для усіх $x \in (-R; R)$ і розбігається при $|x| > R$. При $x = \pm R$ для кожного ряду питання про його збіжність розв'язується окремо. Це число R називають *радіусом збіжності* степеневого ряду. Його можна знаходити за однією із формул

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

у випадку існування відповідної границі.

Якщо $R = 0$, то ряд (4) збігається тільки в точці $x = 0$, а якщо $R = +\infty$, то він збігається на усій числовій осі.

Очевидно, степеневий ряд (5) загального вигляду набуває форми (4) після заміни $x - x_0 = t$, тому його інтервалом збіжності буде інтервал $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Сформулюємо **властивості степеневих рядів**.

1. Степеневий ряд збігається рівномірно на будь-якому відрізку з інтервала збіжності.
2. Сума степеневого ряду $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ неперервна в кожній точці інтервала збіжності.
3. Степеневий ряд можна почленно диференціювати в кожній точці x його інтервалу збіжності, тобто

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

Радіус збіжності при цьому не змінюється. Отже, степеневий ряд можна почленно диференціювати будь-яку скінченну кількість разів.

4. Степеневий ряд можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку з інтервала збіжності, зокрема, для довільного $x \in (-R; R)$. Таким чином,

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Радіус збіжності зінтегрованого ряду буде такий же, як і ряду (4).