

Завдання для самостійного розв'язання

15. Знайти області збіжності функціональних рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n(x-5)^n}$.

16. Довести рівномірну збіжність у зазначених проміжках таких функціональних рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot \sqrt{1+nx}}$, $x \in (0; \infty)$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ на всій числовій осі.

17. Знайти суми рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

18. Знайти області збіжності степеневих рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

19. Знайти суми поданих рядів:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$ (Вказівка. Розглянути суму ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$).

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. а) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{5}{17} + \dots$; $a_{n+1} = \frac{2n-1}{n^2 + 2n + 2}$;

б) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \dots$; $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}}$.

2. а) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$; б) $a_n = (-1)^{n-1}$. 3. $\frac{23}{45}$. 4. Ні.

6. а) збігається; б) розбігається; в) збігається; г) збігається.

7. а) розбігається; б) розбігається; в) збігається; г) збігається.

8. Розбігається.

9. а) збігається; б) розбігається; в) збігається; г) збігається.

10. а) розбігається; б) розбігається.

11. а) збігається; б) розбігається; в) збігається;

г) збігається; д) збігається.

13. а) збігається абсолютно; б) збігається умовною;

в) розбігається.

14. а) 0,06; б) 0,02; в) 0,69.

15. а) $(1; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$;

в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \frac{14}{3}\right) \cup \left[\frac{16}{3}; +\infty\right)$.

17. а) $\frac{x}{(x-1)^2} (|x| > 1)$; б) $\ln 2$.

18. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(2; 8]$; в) $[1; 5)$.

19. а) $\frac{2}{(1-x)^3} (|x| < 1)$; б) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.