

2.5 Ряди Фур'є

Тригонометричний ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$, коефіцієнти якого визначаються з формул

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

називається **рядом Фур'є** функції $f(x)$.

Функція $f(x)$ задовольняє **умови Діріхле** на відрізку $[a, b]$, якщо вона кусково-неперервна і кусково-монотонна на цьому відрізку.

Теорема Діріхле (достатня умова розкладу функції в ряд Фур'є). Якщо періодична функція $f(x)$ (період $T = 2l$) задовольняє на відрізку $[-l, l]$ умови Діріхле, то її тригонометричний ряд збігається в кожній точці x цього відрізка, причому для його суми

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

справедливі рівності:

1) $S(x) = f(x)$, якщо $-l < x < l$ і x є точкою неперервності функції $f(x)$;

2) $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, якщо $-l < x < l$ і x є точкою розриву функції $f(x)$;

3) $S(-l) = S(l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}$.

При розкладі функції $f(x)$ у ряд Фур'є на довільному відрізку $[a; a+T]$ довжини $T = 2l$ межі інтегрування у формулах для коефіцієнтів Фур'є слід замінити відповідно на a та $a+2l$.

Для парної функції $f(x) = f(-x)$ всі коефіцієнти $b_n = 0$ і ряд Фур'є набуває вигляду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots).$$

Для непарної функції $f(x) = -f(-x)$ всі коефіцієнти $a_n = 0$ і ряд Фур'є набуває вигляду

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Результатом розкладу парних або непарних функцій є неповні ряди Фур'є. Але можна розглядати і задачі ціленаправленого розкладу в ряди тільки за синусами або тільки за косинусами. Такі задачі розглядають, якщо $f(x)$ задана на проміжку $[0; l]$ (рис. 1а). Для цього треба:

1) доозначити цю функції на проміжку $[-l; 0]$ так, щоб нова функція $F(x)$ вже на проміжку $[-l; l]$ була, наприклад, парною (рис. 1б), а на проміжку $[0; l]$ щоб $F(x) = f(x)$;

2) періодично продовжити функцію $F(x)$ на всю числову пряму, $T = 2l$, нехай $\varphi(x)$ – назване продовження (рис. 1в);

3) функцію $\varphi(x)$ розкладаємо в ряд Фур'є.

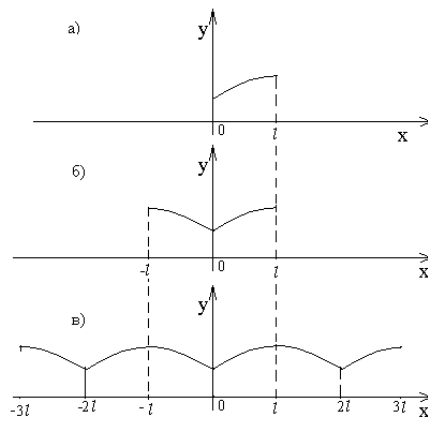


Рисунок 1

Зрозуміло, що для обчислення коефіцієнтів розкладу в ряд Фур'є аналітичного виразу "продовження" функції $f(x)$ не треба знати; досить обмежитись інформацією про $f(x)$ лише на проміжку $(0;l)$.

Аналогічно здійснюємо розклад в ряд Фур'є за синусами. Для цього треба функцію $f(x)$, що задана на $[0;l]$, продовжити на $[-l;0]$ непарно.