

## Приклади розв'язання задач

27. Розкласти з періодом 2 функцію  $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$  в ряд Фур'є. За допомогою

цього розкладу обчислити суму ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ .

► Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \int_{-1}^0 1 dx + \int_0^1 x dx = x \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$a_n = \int_{-1}^0 \cos n\pi x dx + \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos n\pi x dx \\ du = dx & v = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_{-1}^0 + x \cdot \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi} \left( -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \right) \Big|_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2},$$

тобто  $a_{2k} = 0$ ,  $a_{2k-1} = \frac{-2}{\pi^2 (2k-1)^2}$ ,

$$b_n = \int_{-1}^0 \sin n\pi x dx + \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin n\pi x \\ du = dx & v = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_{-1}^0 - x \cdot \frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x dx = -\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} - \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}.$$

Отже, шуканий ряд Фур'є

$$S(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2 \cos(2n-1)\pi x}{\pi (2n-1)^2} + \frac{1}{n} \sin n\pi x \right). \quad (8)$$

До речі, задана функція неперервна на всьому відрізку  $[-1;1]$ , за винятком точки  $x = 0$ , в якій вона має розрив першого роду, і також  $f(-1+0) = f(1-0) = 1$ , тому для всіх

$$x \in [-1;1], \quad x \neq 0, \quad \text{виконується } S(x) = f(x), \text{ а } S(0) = \frac{f(-0) + f(+0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Поклавши в (8)  $x = 0$ , отримуємо  $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi (2n-1)^2}$ , звідки  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$ . ◀

28. Розкласти функцію  $f(x) = x$ , задану на відрізку  $[0;\pi]$ , в ряд Фур'є:

а) за косинусами; б) за синусами.

► а) Продовжуючи парно функцію  $f(x)$  на відрізок  $[-\pi,0]$ , одержуємо  $f(x) = |x|$ ,

$x \in [-\pi;\pi]$ . Продовжуючи її далі, вже періодично, обчислюємо коефіцієнти  $a_0, a_n$ :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos nx \\ du = dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} -$$

$$- \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), n=1,2,\dots,$$

тобто  $a_{2k} = 0$ ,  $a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2}$ .

Розклад в ряд Фур'є за косинусами має вигляд

$$S_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \blacktriangleleft$$

► б) Продовжимо непарно функцію  $f(x)$  на відрізок  $[-\pi, 0]$ , одержуємо  $f(x) = x$ ,  $x \in [-\pi; \pi]$ . Обчислюємо коефіцієнти

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin nx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = -\frac{2}{\pi} \frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx = -\frac{2}{n} (-1)^n + \frac{2}{\pi n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Розклад в ряд Фур'є за синусами має вигляд

$$S_2(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n}$$

Зауважимо, що в даному випадку розклад за косинусами зручніший для обчислень, ніж розклад за синусами, оскільки члени ряду розкладу за косинусами спадають швидше.

Крім того, функція  $S_1(x)$  неперервна на всій числовій осі, а  $S_2(x)$  має розриви першого

роду в точках  $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Тому  $f(x) = S_1(x)$  при усіх  $x \in [0; \pi]$ , а  $f(x) = S_2(x)$

при  $x \in [0; \pi)$ .  $\blacktriangleleft$